

Bevezetés a modern fizikába

Jakovác Antal¹ , Pósfay Péter^{1,2}

¹Eötvös Loránd Tudományegyetem

²Wigner Fizikai Kutatóközpont

2019. február 26.

Kivonat

A XX. század rohamos fejlődést hozott a fizika szinte minden területén. A kvantummechanika forradalmasította az atomi méretű objektumokról alkotott klasszikus elképzeléseket és egy jelenségekben gazdag, gyakran meghökkenítő tulajdonságokkal rendelkező új világot tárt elénk. Einstein általános és speciális relativitás elmélete módosította magáról a térről és időről kialakult hagyományos elképzeléseket minek következtében magáról az univerzumból alkotott képünk is megváltozott. A század második felében a kvantumtérelméletek fejlődése lehetővé tette a részecskefizika standard modelljének kialakítását, mely az univerzum elemi építőköveinek működését tárta fel. A radioaktivitás, a maghasadás felfedezése új energiaforrást, terápiás eljárásokat és vizsgálati módszereket adott az emberiség kezébe. A félvezető anyag felfedezése lehetővé tette, hogy olyan speciális kristályokat állítsunk elő melynek vezető tulajdonságait mesterségesen szabályozhatjuk. Ennek köszönhetjük tranzisztort a mikrochip és az elektronikus számítógép létrejöttét, melyek a modern élet elengedhetetlen kellékei. Egy jegyzet keretein belül lehetetlen vállalkozás volna minden részletében menően bemutatni azt a hatalmas szellemi haladást amit a tudomány a múlt században elért, ezért a szerzők a legfontosabb eredmények alapjainak bemutatását, a tudományban felmerült alapproblémák és az ezekre adott válaszok lényegének ismertetését tűzték ki célul.

Tartalomjegyzék

1. A tudományos módszer	4
<i>A tudományos módszer elemei, alkalmazhatósága, nehézségek</i>	
1.1. Ajánlott irodalom	7
2. Speciális relativitáselmélet	9
2.1. Új utakra kényszerítő tapasztalatok	9
<i>A newtoni világmép és az elektrodinamika ellentéte, A relativitás elve, A relativitáselmélet alapkísérletei</i>	
2.2. A Lorentz-transzformáció	11
<i>Az intervallum invarianciája, Merőleges távolságok invarianciája, A relativitáselmélet 3 alapgondolata, Lorentz-transzformáció, Megfigyelő definíciója</i>	
2.2.1. A relativitáselmélet három alapgondolata	12
2.2.2. Lorentz-transzformáció levezetése	15
2.3. A Lorentz-transzformáció vizsgálata	23
<i>Egyidejűség relativitása, egyhelyűség relativitása, időtartamok relativitása, távolságok relativitása, idődilatáció, hosszkontrakció, Sebességek összeadása, Newtoni mechanika mint határeset, kísérlet: müonok bomlása</i>	
2.3.1. Események koordinátáinak relativitása	23
2.3.2. Eltelt idő és távolság relativitása	25
2.3.3. A müon kísérlet	33
2.4. Minkowski-téridő	35
<i>Téridő-diagram, részei, megfigyelők, egyidejű pontok, hosszkontrakció, idődilatáció, hiperbolikus téridő, Pajta paradoxon, sajátidő, ikerparadoxon</i>	
2.4.1. A Téridő-diagram	35
2.4.2. Események koordinátái és távolságok a diagramon . . .	38
2.4.3. Pajta-paradoxon	43
2.4.4. Sajátidő	44
2.5. Impulzus és energia	47
<i>Négyesvektorok a téridőben, relativisztikus impulzus, relativisztikus energia, energia-impulzus összefüggés, Newtoni limesz, megmaradó mennyiségek, tömegdefektus</i>	
2.5.1. Négyesvektorok	48
2.5.2. Megmaradó mennyiségek	50

2.6. Ajánlott irodalom	55
3. Általános relativitás elmélet és kozmológia	56
3.1. Az általános relativitáselmélet alapfogalmai	56
<i>Az erős és gyenge ekvivalencia elv, lokális vonatkoztatási rendszer, metrika, sík téridő, görbült téridő</i>	
3.1.1. Lokális inerciarendszerek	57
3.1.2. Metrika	58
3.2. Schwarzschild-metrika és következményei	61
<i>A metrika szemléltetése, görbültség, beágyazott diagram, gravitációs vöröseltolódás, fényelhajlás</i>	
3.2.1. A metrika alakja	61
3.2.2. Fizikai következmények	65
3.3. Gravitációs hullámok	73
<i>Metrika gravitációs hullámokra, sajátávolság, gravitációs hullámok tulajdonságai, hatása, Gravitációs hullámok detektálása, gravitációs hullámok forrásai</i>	
3.3.1. Metrika gravitációs hullámokra	74
3.3.2. A gravitációs hullámok detektálása	77
3.4. Ajánlott irodalom	83
4. Kvantummechanika alapjai	84
4.1. Kvantált energiaszintek, anyaghullámok	84
<i>Fekete test sugárzása, fotoeffektus, színeképek, két rés kísérlet fényre és elektronokra, Compton-effektus, De-Broglie hullámhossz, Compton-hullámhossz</i>	
4.2. Schrödinger-egyenlet, hullámmechanika	95
<i>Az anyaghullámok általánosítása, Schrödinger-egyenlet, időfüggetlen Schrödinger-egyenlet, Hullámfüggvény jelentése, a kvantummechanika alapelvei, kvantumszámok, sajátállapotok határozatlansági reláció</i>	
5. Magfizika és radioaktivitás	115
6. Térelmélet és a részecskefizika	116
7. Renormálás és univerzalitás	117
8. Szilárdtestfizika, szupravezetés, félvezetők	118

1. A tudományos módszer

A modern fizika eredményei sokszor a hétköznapi tapasztalatainknak, intuícióinknak ellentmondóak, ezért a "józan ész" gyakran rossz tanácsadó a problémák elemzésekor. Az ember intuíciója a fizikai világban található jelenségekkel kapcsolatban az evolúció során alakult ki, és abban a környezetben működik jól, amihez az ember fejlődése során alkalmazkodott, ami tipikusan az afrikai szavannákon előforduló méret, sebesség, és hőmérséklet tartományokat jelenti. Ezért van az, hogy a gépek mechanikai részének megértéséhez (daru működése, mérleg, fék stb...) elég egy kicsit odafigyelni esetleg egy kísérletet bemutatni, és a legtöbb ember máris érti hogyan működik annak ellenére, hogy esetleg nem tudja a matematikai formalizmust ami leírja az adott jelenséget. Az elektromossággal kapcsolatban már kicsit komplikáltabb a helyzet. Fogalmakat kell elsajátítani (erőtér, töltés) amiknek nincs megfelelője a klasszikus mechanikában, így a helyes intuíció kialakításához nagyon sok kísérletet kell végezni, illetve problémát kell megoldani. A jelenségek megértése nem feltétlenül azt jelenti, hogy az illető tisztában van a tudományterület matematikai formalizmusával hanem azt, hogy rendelkezik a jelenségeket hatékonyan és helyesen magyarázó fogalmakkal és azokat jól használja a problémák leírására. Erre legjobb példa Faraday aki nem kapott magas szintű matematikai oktatást, de az *erőtér* fogalmának megalkotásával nagyon intuitíven tudta magyarázni az elektromos és mágneses jelenségeket.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy ahogy a fizika egyre több jelenséget vizsgált a hétköznapi mérettartománytól egyre távolabb kerülve egy nagyon másféle világot tapasztalt mint amit megszoktunk. A világ más és más skálán (nagy sebességek esetén, kis mérettartományokban, az univerzum léptékén) máshogy és máshogy viselkedik. Ez az eredmény már önmagában meglepő, hiszen látszólag semmi nem indokolja ezt a változást, nem tapasztaljuk jelét a hétköznapijaink során. (Ha egy téglát kisebb és kisebb darabokra vágunk mikor elérek a téglát alkotó molekulák méretskálájára a darabok már kvantummechanikai viselkedést mutatnak, pedig amikor még egyben voltak az egész téglában, semmi kvantummechanikait nem tapasztaltunk: az alkotórészek ezen tulajdonsága nem mutatkozik meg a hétköznapi körülmények között)

A tudományos módszer elemei

Mivel a modern fizika olyan körülmények között vizsgálja a világot ami messze áll attól a tartománytól amiről jól kialakult látásmódunk van, szükség van egy megbízható módszerre, mellyel a hibás feltételezéseket ki lehet szűrni. Ez a *tudományos módszer* ami elgondolásaink, feltételezéseink folyamatos megkérdőjelezésén, ellenőrzésén alapul. A módszer lényege a következőképpen foglalható össze:

1. **Általános elmélet felállítása** Ez egy olyan módszer és fogalomrendszer ami eddigi tapasztalataink egy részét koherens módon magyarázza. Az elmélet határait keresve olyan jelenségek után kutatunk amiket nem tud magyarázni, hogy ezek segítségével javítsunk azon.
2. **Hipotézis felállítása** Az eddigi tapasztalatokra és a már meglévő fizikai fogalmakra (elméletre) alapozva feltételezzük, hogy adott körülmények között (pl.: hőmérséklet, nyomás, méretskála, energia, sebesség) hogyan viselkedik egy *fizikai rendszer*. Ez lehet egy már meglévő elmélet kibővítése is, vagy egy teljesen új feltevés.
3. **Tesztelhető jóslatok felállítása** Ahhoz, hogy ellenőrizhessük elméletünk helyességét először képesnek kell lennie ellenőrizhető eredmények előállítására. Egy olyan elmélet ami nem ad ellenőrizhető jóslatot lehet bármilyen szép, gyakorlati szempontból hasznosíthatatlan.
4. **Megfigyelések, kísérletek elvégzése** Ha a hipotézisünk képes ellenőrizhető eredményeket produkálni akkor mérések elvégzésével tesztelhetjük. Ennél a lépésnél nagyon fontos az adatok kiértékelése, mely során kiszűrjük a hibás mérési eredményeket (pl. rosszul működő berendezés), meghatározzuk az adatok pontosságát és ha kell újra elvégezzük a mérést. A mérési eredményeknek megismételhetőnek kell lenniük, azaz több egymástól független vizsgálatnak is igazolnia kell azok helyességét.
5. **A tapasztalatok beépítése az új elméletbe, hipotézisbe** A mérési eredmények alapján levonjuk a következtetést a hipotézisünkre vonatkozóan. Ha a mérések nem mondanak ellent neki akkor feltételezzük, hogy igaz és visszatérve az 1.-es ponthoz új körülmények között próbáljuk meg ellenőrizni. Ha a mérések ellentmondanak neki, akkor új hipotézist kell felállítani.

Fontos, hogy a hipotézist amit ellenőrizni akarunk egy fizika rendszerre vonatkozóan állítjuk fel, és nem az egész világra vonatkozó minden körülmények között igaz állítás. A tudományos módszer rejtetten épít arra a feltevésre, hogy minden jelenség leírásánál nagyon sok olyan külső tényező van amik hatása a megfigyelt mennyiségekre (és a hipotézisre) vonatkozóan elhanyagolható. Ha egy kísérletnél minden külső hatás egyforma nagy jelentőséggel bírna, akkor lehetetlen lenne egyre finomabbá váló egyre pontosabb elméletekkel közelítsünk a valósághoz, hiszen kezdettől fogva minden pontosan figyelembe kellene vennünk, ami lehetetlen feladat. A tudományos módszer tehát akkor alkalmazható hatékonyan ha egy olyan hipotézissel van dolgunk ami viszonylag kis számú fizikai mennyiséggel operál és az ezek közötti összefüggést magyarázza. Ez egyben azt is jelenti, hogy a sok külső paraméter ami nem szerepel a hipotézisben elhanyagolható az adott körülmények között.

Mikor a módszer jól alkalmazható

Egy példa arra amikor a tudományos módszer jól alkalmazható az ohmikus ellenállás mérése. Itt a hipotézis az Ohm-törvény, a kis számú jól meghatározott mérhető fizikai mennyiség amik között kapcsolatot teremt pedig az áramerősség és a feszültség. Az, hogy egy vezetékdarabhoz egy áram és feszültségfüggetlen konstans lehet rendelni a hipotézis része és csak bizonyos körülmények között igaz. például ha a vezeték melegedni kezd megnő az ellenállása, ezért az nem áramerősség független időben állandó konstans mennyiség. A hipotézisünk csak szobahőmérsékleten (állandó hőmérsékleten) igaz, mert ekkor a hőmérséklet olyan "külső" hatás (sok másikkal együtt) amit elhanyagolhatunk. Ha finomítani szeretnénk az elméletet akkor figyelembe lehet venni pl. a hőmérsékletet. Egy feltevés lehet, hogy az ellenállás változása arányos a hőmérséklet megváltozásával. Mikor ezt a hipotézist teszteljük meg kell mérnünk az ellenállást különböző hőmérsékleteken. Látható, hogy így ez az elmélet eggyel több mérhető fizikai mennyisége tartalmaz, nevezetesen a hőmérsékletet, ami ezelőtt egy külső elhanyagolt tényező volt. Egyre több és több paramétert figyelembe véve fokozatosan haladva egyre pontosabb és összetettebb elméletet alkothatunk. Ez a tudományos módszer egyik nagy előnye, hogy lehetővé teszi, hogy egy bonyolult problémát részekre bontva vizsgálhassunk meg és így állíthassuk össze újra egészzé. Sokszor azonban nem nyilvánvaló, hogy mik azok a külső paramétereket amiket eredményesen építhetünk be a modellbe, vagy, hogy hogyan kell ezeket beépíteni. A legtöbb elmélet kiterjesztésénél ez jelenti a kihívást. Az ellenállásos példánál maradva

ha tovább teszteljük a hőmérsékletfüggést kiderül, hogy bizonyos anyagokat nagyon kis hőmérsékletre lehűtve az ellenállásuk egy ugrással nullára esik. Ez a szupravezetés jelensége aminek megértéséhez kvantummechanikára van szükség. A fenti sémában ez azt jelenti, hogy elég alacsony hőmérsékleten már nem elhanyagolható tényező az, hogy a vezeték atomokból és elektronokból áll amik kvantummechanikai viselkedést mutatnak. A modellünk másik határa a magas hőmérsékleten található amikor az ellenállás elolvad és így nem vezet többé az áramot. Ekkor a külső tényező amit eddig nem vettünk figyelembe az atomokat, molekulákat összetartó erő.

Mikor ütközik a módszer nehézségekbe?

A tudományos módszer nem alkalmazható könnyen olyan esetekben amikor a vizsgálni kívánt rendszer nehezen választható le a környezetéről, azaz amikor nem tudunk egy szabályt alkotni arra, hogy eldöntsük mit hanyagolhatunk el és mikor. Az élő szervezetek tipikusan ilyen rendszerek: viszonylag változatlanul viselkednek egy számukra megfelelő paramétertartományban, azonban még itt is látszólag jelentéktelen tűnő körülmények megváltozására nagyon heves reakciót produkálnak. Az ilyen rendszerek vizsgálata tudományos módszerekkel nem lehetetlen de tipikusan nehéz, mert a felállított hipotézisek nagyon sok fizikai mennyiséget tartalmaznak, ezért a mérések bonyolultak, sok a hibalehetőség, nagyon sok kontroll kísérletre van szükség. Ilyen esetekben hatékony módszer az **effektív elméletek** felállítása, melyek szándékosan nem próbálnak meg általánosak lenni, csak egy szűk paramétertartományon belül használhatóak. Az általánosság feláldozása révén azonban csökkenthető a releváns fizikai mennyiségek száma, így a hipotézisek tesztelhetővé ellenőrizhetővé válnak. A mindennapi életünk tele van ilyen effektív elméletekkel, amik csak bizonyos körülmények esetében írják le jól a valóságot. Például a közgazdaságtanban a kereslet és a kínálat egyensúlyának törvénye csak akkor lehet igaz, ha minden vevő mindig tisztában van az adott típusú termékek árával. A modell nem képes leírni olyan dolgokat mint a márkahűség vagy divat, de egy szűk kereten belül jól felhasználható a folyamatok elemzésére.

1.1. Ajánlott irodalom

- John D. Barrow. *A fizika világgépe*. Akadémiai, 1994

- John D. Barrow. *The World Within the World*. Oxford University Press, 1990
- Pólya György. *A gondolkodás iskolája*. Akkord, 2000
- Simonyi Károly. *A fizika kultúrtörténete a kezdetektől a huszadik század végéig*. Akadémiai Kiadó, 2011
- Pólya György. *Matematikai módszerek a természettudományban*. Gondolat Könyvkiadó, 1984

2. Speciális relativitáselmélet

2.1. Új utakra kényszerítő tapasztalatok

Einstein speciális relativitáselméletéhez számos olyan kísérleti és elméleti eredmény vezetett melyeket a klasszikus fizika keretei között nem tudtak megmagyarázni. Az ezekre a kérdésekre adott válaszok vezettek el végül az elmélethez, mely megváltoztatta a térről és az időről alkotott elképzeléseinket. Hogy megérthessük az elmélet alap gondolatait ismernünk kell azokat az alapproblémákat amik a kialakulásához vezettek és, így szerepet játszottak az alapfogalmak kialakulásában.

A fény és a relativitási elv

1887-ben Hertz kísérletileg igazolta Maxwell elképzelését miszerint a fény az elektromágneses hullámok (EM hullámok) egy fajtája és emiatt viselkedését az elektrodinamika Maxwell egyenletei írják le. Ezek szerint az elektromágneses hullámok (és a fény) sebessége vákuumban két természeti állandótól függ a következő módon:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1)$$

ahol μ_0 és ϵ_0 a vákuum permeabilitás és permittivitás. A képlet alapján látható, hogy c is egy természeti állandó, azaz minden körülmények között ugyanaz az értéke. Ez egy nagyon érdekes következménye az elektrodinamikának hiszen c az egyetlen sebesség jellegű univerzális fizikai konstans. Ez azt jelenti, hogy a fény sebessége vákuumban minden körülmények között ugyanakkora ami azonban ellentmond a Galilei által felállított és a fizikai gondolkodás alapját képező **Relativitási elvnek**.

A relativitási elv kimondja, hogy a természet törvényei ugyanolyanok minden inerciarendszerben. Kísérleteinket, megfigyeléseinket mindig valamilyen vonatkoztatási rendszerben végezzük el, de az elv szerint csak az inerciarendszerekben elvégzett kísérletek vezetnek azonos eredményekre. Inerciarendszer például egy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző jármű, de nem inerciarendszer egy gyorsuló autó. Inerciarendszerekben a fizika ugyanolyan, azonban minden más típusú vonatkoztatási rendszerben függ a rendszer esetleges választásától (Például egyenes vonalú gyorsuló mozgást végző vonatkoztatási rendszerben mások lesznek a mechanika szabályai mint mondjuk egy

forgó rendszerekben és csak inerciarendszerekben kapjuk a Newton törvényeket). Fontos, hogy a relativitási elv nem állítja, hogy a fizikai mennyiségek mérőszámai (mért értékei) is ugyanazok minden inerciarendszerben. Az egyetlen dolog ami ugyanaz az a **fizikai törvények matematikai alakja**. **Megjegyzés** A relativitási elv nem állítja, hogy a fizika törvényei minden vonatkoztatási rendszerben (nem inerciarendszerben!) azonosak, inkább egy iránymutatás arra nézve, hogy úgy kell a fizikai törvényeket definiálni, hogy legyen egy jól meghatározható széles csoportja a vonatkoztatási rendszereknek amikben ugyanolyanok azaz, hogy legyen a lehető legkevésbé vonatkoztatási rendszer függő. Ezeket a vonatkoztatási rendszereket nevezzük inerciarendszereknek

Miért vezet ellentmondásra a fénysebesség állandósága és a relativitási elv, ha a newton törvényekre alkalmazzuk? A Newtoni mechanika szerint egy álló vagy egy egyenletes sebességgel mozgó test tekinthető inerciarendszernek. Tegyük fel, hogy egy nyugvó laboratóriumhoz (L) képest egyenletes, \mathbf{v} sebességgel haladó rendszerben (L') egy test állandó \mathbf{w} sebességgel mozog. Ekkor az L rendszerhez képest a test $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ sebességgel mozog. Az módszert amivel áttértünk egyik vonatkoztatási rendszerből a másikba **Galilei-transzformációnak** nevezzük. Az általános alak:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}t \\ t &= t', \end{aligned} \tag{2}$$

ahol a vesszős koordináták az L' rendszerben vett értékek, \mathbf{v} pedig L' sebessége L -hez képest. Ha ezt a transzformációt használjuk akkor a Newton-féle mozgástörvények ugyanazok lesznek az L és az L' rendszerben, ezért a mechanika szabályai is ugyanazok.

Ha történetesen az L' rendszerben a fény mozgását figyeljük, akkor a fentiek szerint a fény az L rendszerhez képest $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{c}$ sebességgel mozog, ami kisebb is és nagyobb is lehet mint a fény vákuumbeli sebessége c . Nyilvánvaló, hogy ez az eredmény rossz, hiszen az elektrodinamika törvényei szerint a fénysebesség univerzális konstans, ami minden megfigyelő számára minden inerciarendszerben ugyanaz. Azaz ha az elektrodinamika törvényeit felhasználjuk az L rendszerben és figyelembe vesszük, hogy az EM hullámok egy \mathbf{v} sebességgel mozgó pontból indulnak ki akkor azt kapjuk, hogy a sebességük c . Hol a hiba a levezetésében? A választ akkor találhatjuk meg, ha megpróbáljuk a Galilei-transzformációt az elektrodinamika törvényeire is alkalmazni, ugyanis ezek nem lesznek ugyanolyan alakúak mind két rendszer-

ben! **Az elektrodinamika nem invariáns a Galilei-transzformációra nézve.**

Két lehetőség áll tehát előttünk:

- Megtartjuk a Galilei transzformációt és ezzel a Newtoni mechanika érvényességét az inerciarendszerekben, de így elvesztjük az elektrodinamikát amit kísérletileg szintén igazoltak.
- Elfogadjuk az elektrodinamikát érvényességét inerciarendszerekben, de ekkor más transzformációt kell keresnünk a Galilei helyett, egy olyat, ami az elektrodinamikát változatlanul hagyja. A probléma az, hogy erre az új transzformációra viszont a Newton-törvények nem lesznek invariánsak.

Ahhoz, hogy el tudjuk dönteni mi a helyes a tudományos módszert alkalmazzuk: itt van előttünk két hipotézis a fizikai jelenségek leírását illetően. Ezek a hipotézisek kísérletileg ellenőrizhető állításokat fogalmaznak meg a fény sebességét illetően különböző inerciarendszerekben. Meg kell mérnünk a fény sebességét egymáshoz képest különböző sebességekkel mozgó inerciarendszerekben és ez alapján el tudjuk dönteni a kérdést. Azt azonban már most is tudhatjuk, hogy az elektrodinamika és a Newtoni mechanika nem lehet igaz egyszerre annak ellenére, hogy mindkettő kísérletileg igazolt elmélet! Ezt az ellentmondást szintén fel kell majd oldania az új elméletnek.

A fénysebesség mérése különböző inerciarendszerekben

Két alapvető kísérletet végeztek el annak kiderítésére, hogy a fény sebessége állandó-e minden inerciarendszerben. Ezek elektrodinamikai eredményt igazolták, és ezzel megcáfolták a newtoni mechanika és a Galilei transzformáció általános érvényességét.

Michelson-Morley kísérlet

Kennedy-Thorndike kísérlet

2.2. A Lorentz-transzformáció

Annak kísérleti igazolása után, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben iránytól függetlenül azonos c sebességgel terjed az előző fejezetben leírtak

szerint a Galilei-transzformáció nem tekinthető többé helyes módszernek a különböző inerciarendszerek közötti átjáráshoz. Ebben a fejezetben bevezetjük a Lorentz transzformációt, ami a kísérleti eredményekkel összhangban áll, és megvizsgáljuk következményeit a newtoni mechanikát illetően.

2.2.1. A relativitáselmélet három alap gondolata

Az intervallum invarianciája Képzeljünk el a következő helyzetet: nyugalomban lévő laboratóriumhoz képest (L rendszer) v sebességgel mozog egy űrhajó (L' rendszer).

- Mindkettő inerciarendszer és úgy választjuk meg a koordinátákat, hogy a két rendszer x-tengelye egybeesik egymással és az űrhajó v sebességével
- A $t = 0$ pillanatban a két rendszer origója egybeesik.

Ezek a feltételezések az általánosság megsértése nélkül mindig feltehetőek és a továbbiakban standard elrendezések nevezzük.

Az L' rendszerben a közös x-tengelyre merőlegesen az y-tengely irányában egy fényjelet indítunk el ami beleütközik egy tükörbe s út megtétele után majd visszaverődik a kiindulási pontba. Az L' rendszerben három eseményt figyelhetünk meg:

- **A:** A fényjel elindul, koordináták: $x' = 0$ és $t' = 0$
- **B:** A fényjel odaér a tükörhöz és visszaverődik, a koordináták: $x' = 0$, $y' = s$ és $t' = \frac{s}{c}$
- **C:** A fényjel visszaér a kiindulás pontba, a koordináták: $x' = 0$, $y' = 0$ és $t' = \frac{2s}{c}$

Mik a koordinátái ezeknek az eseményeknek az L rendszerből nézve? Mivel az űrhajó és a tükör mozog a laboratóriumhoz képest az x-tengely mentén v sebességgel, a fényjel kiindulási pontjának x-koordinátája többé nem egyezik meg a visszaverődési pont x-koordinátájával az L rendszerben. A laboratóriumból nézve a fény egy A-B-C **háromszög** mentén mozog. Emiatt az események koordinátái az alábbiak szerint alakulnak:

- **A:** $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$

- **B:** $x = \Delta x, y = s, t = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + s^2}}{c}$
- **B:** $x = \Delta x, y = 0, t = 2\frac{\sqrt{\Delta x^2 + s^2}}{c}$

Látható, hogy a két rendszerből nézve a B és C események időpontja különböző! Ez annak a következménye, hogy a fény útja a két rendszerből nézve más (hétköznapi tapasztalatainkkal teljesen megegyező következtetés), azonban a fény ugyanazzal a c sebességgel teszi meg a két különböző utat. **Megjegyzés** Ez hanghullámoknál nem így van, mert azok mindig a *levegőhöz képest* terjednek állandó sebességgel. Ha egy mozgó vonatban beszélgetünk akkor a levegő amihez képest a hanghullámok állandó sebességgel mozognak szintén mozog a vonat sebességével, ezért ha az állomásról valaki megmérné a sebességüket az a vonat sebességével nagyobb lenne az állomáshoz képest számítva.

A hagyományos newtoni elképzelés szerint az idő volt minden inerciarendszerben azonos, ezt azonban nem tudjuk továbbra is fenntartani, hiszen a fény sebességének kell minden inerciarendszerben azonosnak lennie. A fenti példa mutatja, hogy ha fény sebességét állandónak szeretnénk tartani akkor az **időt is transzformálni kell**. Ez a most az a problémát állítja elénk, hogy nem tudjuk pontosan mit is értsünk idő alatt, hiszen ezek szerint minden inerciarendszerben lehet más. A fény sebességének állandósága siet a segítségünkre: 1 másodperc az az időtartam ami alatt a fény $\frac{1}{c}$ hosszúságú utat befut. Ez az idő mérésére vonatkozó mérési utasítás ami a távolságok mérésén és a fénysebesség állandóságán alapszik. Mostantól ez az **időmérés definíciója**, és mivel semmi nem garantálja, hogy a távolságok a különböző inerciarendszerekben ugyanazok lesznek az idő is más lehet más inerciarendszerekben. A definíció előnye az, hogy viszont maga az idő definíciója vonatkoztatási rendszertől függetlenül jól működik: ezt az idődefiníciót használva a fizikai törvényekben (pl elektrodinamika) azok ugyanazok lesznek minden inerciarendszerben.

Az idő tehát transzformálódik az inerciarendszerek között, de található egy olyan mennyiség ami minden rendszerben ugyanaz: **invariáns intervallumnégyzet**

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (3)$$

Ennek állandósága lép tehát az időtartamok állandóságának helyébe: Az A és C események között eltelt idő különbözik L és L' között de az A és c

között intervallumnégyzet állandó:

$$\begin{aligned}\Delta s_{AC}^2 &= c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta r')^2 \\ 4c^2 \frac{\Delta x^2 + s^2}{c^2} - 4\Delta x^2 &= c^2 \frac{4s^2}{c^2} - 0\end{aligned}\tag{4}$$

Megjegyzés: Az intervallum felfogható az események között eltelt idő és a köztük lévő távolság általánosításaként: Mivel az idő és a tér is transzformálódik, külön-külön az időbeli és a térbeli "távolság" nem állandó, de ez a speciális kombinációjuk igen. Emiatt szokták azt mondani, hogy a relativitáselmélet a tér és az idő fogalma helyett az un. **téridőt** használja, azaz a tér és idő komponensek nem külön-külön transzformálódnak hanem tudnak keveredni. Míg a Galilei transzformáció időtartamot időtartamba, távolságot távolságba transzformál a speciális relativitás elméletben ezek a fogalmak a fentieknek megfelelően keverednek.

Merőleges távolságok invarianciája Mivel a relativitáselméletben a tér és az idő is transzformálódik minden olyan mennyiség hasznos ami állandó marad két inerciarendszer között, mert egyszerűsíti a számolásokat. A fenti levezetésben hallgatólagosan feltételeztük, hogy a fény y-irányú mozgása mindkét rendszerben ugyanolyan távolságban megy végbe. Ez fontos pontja volt a számolásnak ezért most belátjuk a **relativitási elv** felhasználásával, hogy a minden a két rendszer relatív mozgására merőleges távolság állandó. Képzeld el, hogy az űrhajón a tükörrre amiről a fény visszaverődik egy tollat ragasztunk ami így az álló laboratórium padlóján csíkot húz. Ha a merőleges távolságok a mozgó és az álló rendszerben különbözőek lennének akkor ez a csík a laborban $> s$ vagy $< s$ helyen lenne. Ha ez így lenne akkor a két inerciarendszerben különböző lenne a fizika, hiszen mind az álló mind a mozgó megfigyelő egyet értene abban, hogy a csík a labor rendszerben nem s távolságra van az x-tengelytől. (Ezt a vonalat mindkét rendszerben meg tudják figyelni ugyanúgy, hiszen a fény a merőleges irányban is c -vel terjed és egyet is értenének a vonal távolságát illetően). Ez ellentmondás hiszen ezzel a módszerrel meg lehetne különböztetni a labor és az űrhajó rendszerét, pedig fentebb említettük, hogy a fizikai törvények úgy vannak megalkotva, hogy az inerciarendszerek egyenértékűek, azaz fizikai méréssel nem lehet különbséget tenni köztük.

A relativitáselmélet 3 alap gondolata A fenti gondolat kísérlet eredményei általánosan is igazak és jól szemlélteti a relativitáselmélet három alappil-

lérét amiből kiindulva a Lorentz-transzformáció és a relativisztikus effektusok származtathatóak:

- : A fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanaz az érték.
- : Két inerciarendszer relatív sebességére merőleges távolságok nem transzformálódnak
- : Két esemény közötti intervallumnégyzet minden inerciarendszerben ugyanaz a érték.

2.2.2. Lorentz-transzformáció levezetése

A fenti három alapgondolatra támaszkodva már meghatározható az a transzformáció ami átveszi a Galilei-transzformáció szerepét az inerciarendszerek közötti átjárásban. Láttuk, hogy a relativitáselméletben a tér és az idő is transzformálódik, de a relatív sebességre merőleges irányokban nincs változás. A fentebb említett standard elrendezésben ezért az L és L' közötti transzformáció általános alakja:

$$\begin{aligned}
 ct &= A(ct') + Bx' \\
 x &= C(ct') + Dx' \\
 y &= y' \\
 z &= z'
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Ahol az időre vonatkozó koordinátákat egy c szorzóval láttuk el, hogy jelezzük, hogy az intervallumban az egyenrangú mennyiségek az x és a ct voltak. Az ismeretlen konstansok meghatározásához vegyük a következő esetet. L' -ben az origóban egy óra ketyeg, számoljuk ki a két ketyegés közötti intervallumot:

$$\begin{aligned}
 \Delta s^2 &= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \\
 &= c^2(\Delta t')^2 - 0 \quad L'\text{-ben} \\
 \Delta s^2 &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = \\
 &= c^2\Delta t^2 - (v\Delta t)^2 = (c^2 - v^2)\Delta t^2 \quad L\text{-ben.}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Hiszen az óra L -ből nézve két ketyegés között $v\Delta t$ utat tesz meg, mert együtt mozog a másik rendszerrel v sebességgel, így persze L' -ben az elmozdulása

0. A fentiekből:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \Delta x &= v\Delta t = \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta t'\end{aligned}\tag{7}$$

Összehasonlítva ezeket 5-el látható, hogy az A és a C konstansok értéke megvan:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ C &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned}\tag{8}$$

Ahol bevezettük a $\beta = \frac{v}{c}$ mennyiséget amit rapiditásnak is szoktak nevezni és azt méri mekkora az L' sebessége a fénysebességhez képest. A másik két konstans meghatározásához csak azt kell megkövetelni, hogy az intervallum invarianciája általánosan is teljesüljön:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = (Act' + Bx')^2 - (Cct' + Dx')^2 = \\ c^2 t'^2 - x'^2 &= (A^2 - C^2)(ct')^2 + (B^2 - D^2)x'^2 + 2(AB - CD)x'ct'\end{aligned}\tag{9}$$

(9)-ben a t' és x' változók együtthatóinak meg kell egyeznie mindkét oldalon, ezért a következő összefüggések igazak:

$$\begin{aligned}1 &= A^2 - C^2 \\ -1 &= B^2 - D^2 \\ AB &= CD\end{aligned}\tag{10}$$

Felhasználva (10)-et a maradék két konstans meghatározható:

$$\begin{aligned}-1 &= B^2 - B^2 \frac{A^2}{C^2} = B^2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) \\ B &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = C \\ D &= B \frac{A}{C} = A\end{aligned}\tag{11}$$

Bevezetve a $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ faktort a Lorentz-transzformáció alakja:

$$\begin{array}{l}
ct = \gamma \left((ct') + x' \frac{v}{c} \right) \\
x = \gamma (vt' + x') \\
y = y' \\
z = z'
\end{array}
\tag{12}$$

A transzformáció olyan alakra is hozható, ami még jobban mutatja szimmetriát a tér és időkomponensek között és megkönnyíti az aritmetikai számolást.

Adjuk meg a sebességeket rapiditásban Érdemes minden sebességet rapiditásban megadni.

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{13}$$

Ennek oka, hogy egyrészt így a képletek sokkal szimmetrikusabbak lesznek és jobban mutatják a fizika lényegét, másrészt így nem kell a sebesség mértékegységeivel foglalkoznunk, hiszen csak az számít a fénysebesség hányad részével halad a test. Ezt úgy is lehet nézni, hogy az, hogy a fénysebesség egy univerzális fizikai állandó, ajánl egy univerzális mértékegységet a sebességre, nevezetesen mindent fénysebesség-százalékban lehet mérni. Mivel a fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanakkora ezért ez a sebesség mértékegység mindenki számára rögtön érthető. A fizikai eredmények nem függenek attól, hogy a sebességnek adott mértékegységben mekkora a számértéke, attól függ csak az eredmény, hogy a fénysebesség hány százaléka ez. Használjuk a Lorentz-transzformáció egy szimmetrikusabb alakját amit rapiditásokkal adunk meg, ez egyszerű behelyettesítéssel adódik (12)-ből. A transzformáció lényeges része:

$$\begin{array}{l}
ct = \gamma (ct') + \gamma\beta x' \\
x = \gamma\beta (ct') + \gamma x'
\end{array}
\tag{14}$$

Ami jól mutatja, hogy a transzformáció milyen szimmetrikus a térre és az időre nézve, és hogy teljesen feleslegesen hordozzuk minden t előtt a c szorzót, mivel ezek mindig együtt jelennek meg.

Mérjük az időt méterekben Ahogy a fénysebesség új mértékegységet jelent a sebességre nézve, úgy új egységként használható az idő mérésére is. **Megjegyzés** Ez azért van így mert az időmérés definíciója (fentebb)

vissza van vezetve a távolságmérésre és a fénysebesség állandóságára. Az időt mérhetjük ct egységekben is ami azt jelenti, hogy az új mértékegység: $(m/s) * s = m$ azaz méter. Számértéke $c * 1s = 3 * 10^8 m$ azaz 1 másodperc idő $3 * 10^5$ km-nek felel meg. Ebből az is következik, hogy 1 m idő nagyon kicsi $3 * 10^{-8}$ s-nak felel meg. A kis időmértékegység nagyon hasznos mert a fény nagy sebessége miatt gyorsan zajlanak az események, így mindig a másodperc milliomod részének megfelelő időértékeket kellene írunk. Ehelyett elnevezzük a $3 * 10^{-8}$ s-ot 1 m időnek és így számolunk tovább. Ekkor a képletben sehol nincs szükség a c -re a t előtt és minden sebességet rögtön rapiditásban kapunk hiszen a $v = s/t$ képletben a t másodpercek helyett m -ekben van mérve és $t[s] = t[m] * c$. Ezzel a transzformáció alakja:

$$\begin{aligned} t &= \gamma t' + \gamma\beta x' \\ x &= \gamma\beta t' + \gamma x' \end{aligned} \quad (15)$$

A Lorentz-transzformáció újabb alakja és a relativisztikus sebesség összeadás Vegyük két inerciarendszer standard elrendezését. L' -ben β'' sebességgel halad az x -tengely mentén egy test, miközben maga L' β' sebességgel halad L -hez képest. Mekkora sebességgel halad ez az test az L rendszerben? Azt tudjuk, hogy a test mozgásának egyenlete L' -ben:

$$x' = \beta'' t', \quad (16)$$

ahol rapiditásban adtuk meg a test sebességét. A test sebessége L rendszerbeli értékekkel kifejezve:

$$\beta = \frac{x}{t}. \quad (17)$$

Tehát csak x -et és t -t kell megadni a vesszős koordinátákkal és készen is vagyunk.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{x}{t} = \frac{\gamma t' + \gamma\beta' x'}{\gamma\beta' t' + \gamma x'} \\ &= \frac{\gamma t'(\beta' + \beta'')}{\gamma t'(1 + \beta'\beta'')} \\ \beta &= \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''} \end{aligned} \quad (18)$$

ahol felhasználtuk (16)-et. Látható, hogy ebben a képletben a sebességek nem egyszerűen összeadódnak mint a Galilei transzformáció esetében, hanem az eredmény mindig kisebb az összegüknél. A fény rapiditása $\beta = 1$ ha ezt írjuk be β' és β'' helyére akkor azt kapjuk, hogy az eredmény szintén 1, azaz semmilyen vonatkoztatási rendszerben nem lépheti túl az összeg a fény sebességét.

Ezt az eredményt felhasználhatjuk arra, hogy a Lorentz-transzformációt egy új alakra hozzuk, ami talán még jobban mutatja a szerkezetét. A (18) képlet nagyon hasonló a két szög összegének hiperbolikusához

$$\tanh(\Theta_1 + \Theta_2) = \frac{\tanh(\Theta_1) + \tanh(\Theta_2)}{1 + \tanh(\Theta_1)\tanh(\Theta_2)} \quad (19)$$

Ez adja a motivációt, hogy a rapiditás helyett új változót vezessünk be:

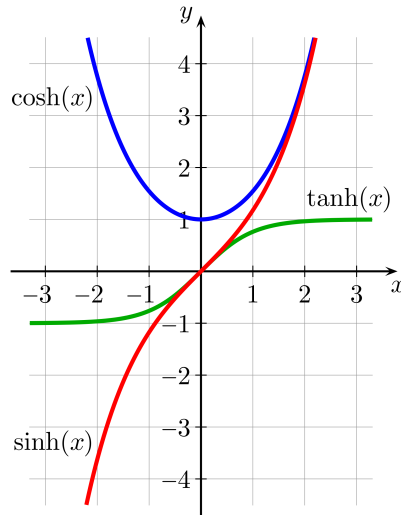
$$\beta = \tanh(\Theta) \quad (20)$$

Ezzel az új sebesség változóval könnyebb dolgozni mert ez úgy adódik össze ahogy azt a sebességektől megszoktuk: $\Theta = \Theta' + \Theta''$. Hátránya, hogy nem rendelkezik olyan szemléletes jelentéssel mint a rapiditás de a fenti képlettel mindig kiszámolhatjuk belőle a rapiditás értékét. Így ahelyett, hogy a bonyolult formulát használjuk a sebességek összeadására (18) csak összeadjuk a θ paramétereket és visszatérünk a rapiditásra ha felhasználva (20)-et. Mivel ez a paraméterezés így megkönnyíti a sebesség összeadást érdemes megnézni, hogy vehetjük hasznát közvetlenül a Lorentz-transzformációban is:

$$\begin{aligned} \beta &= \tanh(\Theta) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh(\Theta)}} = \\ &= \frac{\cosh(\Theta)}{\sqrt{\cosh(\Theta)^2 - \sinh(\Theta)^2}} = \cosh(\Theta) \\ \beta\gamma &= \tanh(\Theta) \cosh(\Theta) = \sinh(\Theta), \end{aligned} \quad (21)$$

ahol felhasználtuk a $\cosh(\Theta)^2 - \sinh(\Theta)^2 = 1$ összefüggést. Ezeket beírva a Lorentz-transzformáció (15) képleteibe, az eredmény:

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \cosh(\Theta) t' + \sinh(\Theta) x' \\ x &= \sinh(\Theta) t' + \cosh(\Theta) x' \end{aligned}} \quad (22)$$



1. ábra. A hiperbolikusfüggvények grafikonjai

Az inverz transzformáció azaz amikor L' -beli értékeket akarjuk átváltani L -beli értékekre, ugyanilyen alakú, csak az a különbség, hogy L sebessége L' -höz képest $-v = -\beta = -\Theta$. Felhasználva, hogy $\cosh(-\Theta) = \cosh(\Theta)$, $\sinh(-\Theta) = -\sinh(\Theta)$, az inverz transzformáció alakja:

$$\begin{aligned} t' &= \cosh(\Theta) t - \sinh(\Theta) x \\ x' &= -\sinh(\Theta) t + \cosh(\Theta) x \end{aligned} \quad (23)$$

A hiperbolikus függvényekkel való munka megkönnyítésre felrajzoltuk a függvénygrafikonokat (1. ábra).

Téridő Látható, hogy a Lorentz-transzformáció során a tér és az idő koordináták is megváltoznak. Emiatt szokták azt mondani, hogy a relativitáselméletben a tér és az idő helyett téridőben kell gondolkodni amit azt jelenti, hogy ezek egymástól elválaszthatatlan fizikai egységes egészet képeznek, nincs értelme külön térről és időről beszélni. Azt azonban nem jelenti, a közhiedelemmel ellentétben, hogy a relativitáselméletben az idő csak egy ugyanolyan dimenzió mint a tér, azzal egyenrangú. Például térben bármerre haladhat egy részecske időben csak előre.

Megfigyelő definíciója A relativitáselméletben gyakran használunk olyan kifejezéseket, mint megfigyelő, mérés. Ezek rövidítések az un. **kiterjesztett**

megfigyelő fogalmára. Minden inerciarendszerben felállítjuk az órák egy hálózátát amik adott távolságban helyezkednek el egymástól egy térbeli rács pontjaiban. Ezek az órák fényjelek segítségével szinkronizálva vannak azaz az egész rendszerben az idő globálisan azonosan telik. Egy esemény mérése, detektálása azt jelenti, hogy feljegyezzük melyik óránál történ (hol volt a rácsban) és, hogy feljegyezzük az óra által mutatott időt. Fontos látni, hogy emiatt mindig időben és térben jól meghatározott események koordinátáit tudjuk mérni illetve ezen események közötti távolságot mind térben mind időben. Az események maguk mindig térben és időben **pontszerűek**.

Az órák szinkronizálása úgy történik, hogy kiválasztunk egy órát ahonnan elindítunk egy fényjelet. Minden órát úgy állítottunk be előzőleg, hogy ettől a kiválasztott órától való távolsága (r) függvényében más időt mutasson (t):

$$t = \frac{r}{c}. \quad (24)$$

Mikor a fényjel eléri ezeket az órákat azok elindulnak. Így tudjuk biztosítani, hogy az órák egyszerre induljanak, és ugyanazt az időt is mutassák, mivel mikor az r távolságra lévő óra indul már t időt eltelt hiszen a fényjelnek ennyi idő kell hogy odaérhessen.

A fizikában a térben és időben bekövetkező **események** távolságát és időkülönbségét szeretnénk felhasználni. Eseményeknek nevezzük a téridő pontjait, amik matematikai értelemben egy 3+1 dimenziós (x, y, z, t) tér pontjai. Az események tehát a téridő elemei, sem térbeli sem időbeli kiterjedésük nincs, olyanok akár a sík pontjai. Ezek az események (más néven Lorentz-vektorok) alkotják azokat az alapfogalmakat amikkel minden más jelenséget meg tudunk magyarázni, mert a Lorentz-transzformáció csak ezekre az alapfogalmakra vonatkozóan ad utasítást arra mi történik a téridőben.

A relativisztikus jelenségek értelmezésének fő nehézsége abban áll, hogy a hétköznapi fogalmaink, amik alapján a világ jelenségeit megértjük nem a fent említett események, ezért közvetlenül nem tudjuk őket betenni a Lorentz-transzformáció képleteibe. Helyette két lépésben kell gondolkodnunk: a hétköznapi fogalmainkat először ki kell fejeznünk a téridő eseményei segítségével, majd ezekre az eseményekre alkalmazva a Lorentz-transzformációt megnézni mi történik a belőlük összerakott fogalmakkal.

A távolság, hossz, eltelt idő, egyidejűség, egyhelyűség alapfogalmak a newtoni szemléletünkben, de nem azok a relativisztikus esetekben. Az alábbiakban végignézzük, hogyan kell ezeket a fogalmakat eseményekkel kifejezni, és hogyan változik meg a jelentésük a relativitáselméletben.

Távolság Két **esemény** távolságán azt a távolságot értjük amit a kiterjedt megfigyelő segítségével határozunk meg. Az órarendszer által feljegyzett adatokból tudjuk mikor és mely órák mellett történtek az események, és ezen órák távolságát értjük az események távolságán. Nagyon fontos, hogy csak az adott koordinátarendszer (óra rendszer) adatait hasonlíthatjuk össze, nem keverhetjük két különböző rendszer által begyűjtött adatokat, mert az már két különböző megfigyelő.

Hosszmérés A hossz nem alapfogalom a relativitás elméletben. Egy rúd hossza tulajdonképpen **két egy időben** történő esemény segítségével definiálható: a rúd elejét és a rúd végét jelentő eseményekkel.

Mikor a rúd áll hozzánk képest akkor jogosan nevezzük a rúd hosszának az elejét és a végét jelentő (folyamatosan zajló) események távolságát.

Az események és a kiterjedt megfigyelő nyelvén ez azt jelenti, hogy az óra rendszerünk minden másodpercben detektál 2 eseményt: az egyiket a rúd eleje "bocsátja ki" a másikat a vége. Az órák méréseit táblázatba foglalva meghatározzuk az **azonos időponthoz tartozó** eleje és vége események távolságát, és ezt hívjuk a rúd hosszának.

Miért jó ez a hossz definíció? Mikor test hozzánk képest nem mozog akkor ez az intuíciónkkal megegyező klasszikus definíció. Mikor a pontok mozognak pontosan azt mérjük meg, hogy mekkora résen férne be a két esemény (eleje, vége) által definiált test a mi rendszerünkben. Érdekes módon az alábbiakban ki fog derülni, hogy bár a klasszikus értelemben a fenti két dolog ugyanazt jelenti, relativisztikusan nem.

A mozgó kiterjedt megfigyelő szempontjából a hossz definíciója ugyanaz, de az eleje és vége események távolsága más lesz. A jelenség mögött az van, hogy a definícióban azonos időpontban detektált események közti távolságot kell meghatározni, és a mozgó rendszerben nem ugyan azok az események lesznek egyidejűek, mint az álló rendszerben.

Megjegyzés A fentieket érdemes megfontolni a rúd szemszögéből is. A "rúd eleje" és "rúd vége" események folyamatosan történnek és a téridőben egy-egy egyenest írnak le. Azaz a rúd ennyivel több mint csak szimpla kiterjedés nélküli téridő pontok. Azaz a rúd eleje, nem egy pont, nem egy esemény, hanem végtelen sok egy egyenesbe rendezve. Mikor azt mondjuk, hogy a "rúd eleje" esemény az egyik vonatkoztatási rendszerben más távolságra van a "rúd vége" eseménytől, akkor nem két pont távolságáról beszélünk hanem a két egyenes és az adott vonatkoztatási rendszer viszonyáról. (bővebben

lentebb)

Időtartamok mérése A kiterjesztett megfigyelő szerint két esemény között eltelt idő:

- Ha a két esemény egy az origóhoz képest álló pontban történt: Egyszerűen beállítjuk a koordináta-rendszerünk óráját az adott pontban, hogy jegyezze fel az időpontot amikor a két eseményt detektálja. Utólag begyűjtve ezeket az adatokat, kivonjuk egymásból a két értéket. Ez a két érték azonos óráról lesz leolvasva.
- Ha a két esemény egy hozzánk képest mozgó pontokban történt: Beállítjuk az órahálózatot, hogy mikor egy óra érzékeli valamelyik eseményt, jegyezze fel mennyi volt az idő. Ezután összegyűjtjük az adatokat: az összes óra helyét, és hogy mikor detektálták a két esemény valamelyikét. Megkeressük az egyik esemény detektálásának időpontját és a másikat is és kivonjuk a két értéket egymásból. Nagyon fontos hogy ezeket nem ugyanarról az óráról fogjuk leolvasni, hanem két különböző helyen lévő óra adatait használjuk fel.

Miért jó ez a definíció? Ha a pont áll amiben a két esemény történik a két módszer ugyanazt adja. Ha a pont mozog, akkor pedig csupán azt mértük meg, hogy mennyi ideig kell működtetni egy mérőberendezést, hogy mindkét eseményt detektálhassa, ami egybeesik a hagyományos idő fogalommal.

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy a fenti, intuíciónak megfelelő definíciók különös hatásokat eredményeznek.

2.3. A Lorentz-transzformáció vizsgálata

2.3.1. Események koordinátáinak relativitása

Azonos helyűség relativitása, az időtartamok relativitása A Lorentz-transzformáció egyik legérdekesebb következménye, hogy két egymáshoz képest mozgó inerciarendszerben az események között eltelt idő nem egyezik meg. Vegyük inerciarendszerek egy standard elrendezését, és nézzük meg hogy amíg L' -ben **két azonos helyen, de különböző időben** bekövetkező esemény között mennyi idő telik el az álló L rendszerből nézve. A feladat megoldásához helyettesítsük be a Lorentz-transzformáció képletébe ((22) vagy (15)), hogy $\Delta x' = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma \Delta t' = \cosh(\Theta) \Delta t' \\ \Delta x &= \gamma \beta \Delta t' = \sinh(\Theta) \Delta t'\end{aligned}\tag{25}$$

Látható, hogy a két esemény között eltelt idő különbözik a két rendszerben, és a távolságuk L -ben nem nulla.

Az 1. ábra alapján tudjuk, hogy $\cosh(\Theta)$ legalább 1 azaz,

$$\Delta t > \Delta t' .\tag{26}$$

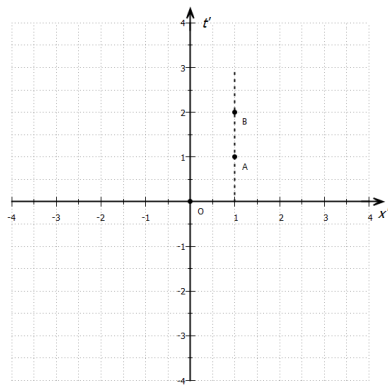
Ez azt jelenti, hogy az L -ben eltelt idő biztosan több, mint L' -ben. Az inverz transzformációba (23) behelyettesítve $\Delta x = 0$ -át, azt kapjuk, hogy $\Delta t' > \Delta t$. Mindkét rendszerből nézve a másikban telt el több idő. A két eredmény megegyezik, mert a \cosh szimmetrikus függvény és ugyanazt az eredményt adja v és $-v$ relatív sebességek esetén. Ez a relativitás elvének következménye: a két inerciarendszerben ugyanazok a fizika törvényei: a hozzájuk képest mozgó inerciarendszerben eltelt idő kevesebb. **Ez az idő-tartamok relativitása**

A fenti tények azért nem ellentmondásosak, mert ahogy az látható, a két esemény az L' rendszerben azonos helyű volt, de az L rendszerben már nem az. Ez az **azonos helyűség relativitása**. Mivel az időmérést a fénysebesség állandóságára és távolságmérésre vezettük vissza, nem csoda, hogy az időkülönbség nem egyezik meg a két rendszerben ha a távolságkülönbségek sem egyeznek meg. Egy ilyen példát mutat be a 2. ábra.

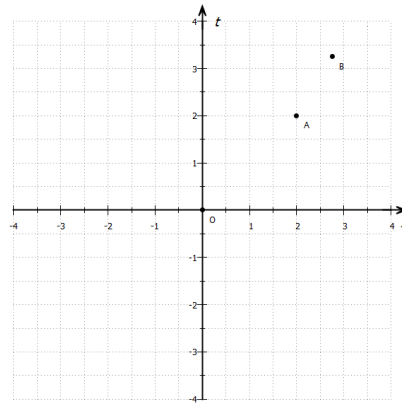
Az egyidejűség relativitása és a távolságok relativitása Számoljuk ki egy L' -ben x -tengellyel párhuzamosan az origóban elhelyezett l hosszú rúd hosszát az L -rendszerben. Ekkor a két esemény melyeknek távolságát számoljuk "a rúd eleje" és "a rúd vége" események. A Lorentz-transzformáció egyenleteibe (15) helyettesítsük be $\Delta x' = l$ és $\Delta t' = 0$, hiszen a rúd eleje és vége között nincs időkülönbség L' -ben.

$$\begin{aligned}\Delta t &= \sinh(\Theta)l = \beta \gamma l \\ \Delta x &= \cosh(\Theta)l = \gamma l\end{aligned}\tag{27}$$

Azaz $\Delta x > l$ mindig teljesül. A mozgó rendszerben rögzített méterrúd (l) tehát a labor rendszerében nézve hosszabbnak látszik. A relativitási elv miatt a mozgó megfigyelő is ezt tapasztalja mikor a az álló rendszer méterrúdját nézi. Ez közvetlenül látható, ha az inverz transzformáció képletébe (23)



(a) L' rendszer



(b) L rendszer

2. ábra. Két azonos helyű esemény L' -ben nem azonos helyű L -ben és az időkülönbségük is megnő: $\Delta t = \gamma \Delta t'$. A mozgó rendszer sebessége $\beta = 0.6$.

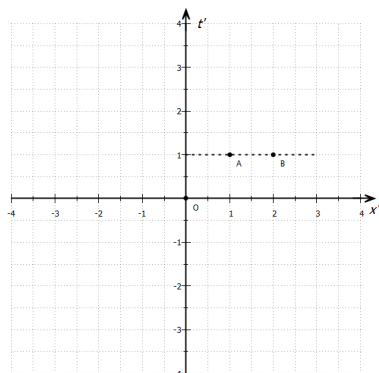
$\Delta x = l$ és $\Delta t = 0$ -át helyettesítünk. Ez a relativitási elv következménye: a fizikai törvények ugyanazok kell legyenek minden rendszerben. A fenti jelenséget hívjuk **távolságkülönbségek relativitásának**.

Ez a jelenség nem ellentmondásos mert bár a rúd végei az L' rendszerben egyidejűek az L -ben nem azok. Ez azt jelenti, hogy L -ben a "rúd eleje" és a "rúd vége" esemény nem egy időben történik, így nem csoda, hogy a köztük lévő távolság (a rúd hossza) sem ugyanaz. Ez az **egyidejűség relativitása**.

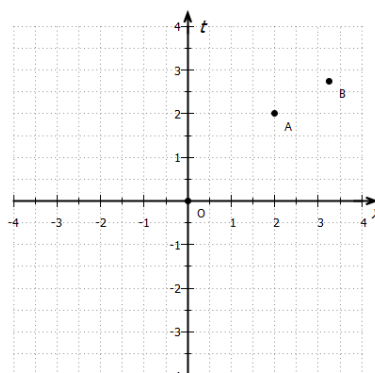
Egy ilyen esetet szemléltet a 3. ábra. Két egyidejű esemény L' -ben már nem az L -ben.

2.3.2. Eltelt idő és távolság relativitása

Az idődilatació A kiterjesztett megfigyelőről szóló részben definiáltuk, hogy mit ért egy megfigyelő két esemény időkülönbségén. Nézzük meg, hogy minek méri az L -beli megfigyelő az L' -ben adott pontban letett óra által mutatott időkülönbséget. Mivel az L' -ben az időt adott pontba letett órahálózattal mérik, ez az eredmény az egész L' rendszer egységes idejére is igaz lesz. Az egyhelyűség relativitásánál látottakhoz hasonlóan helyettesítjük be Lorentz-transzformáció (15) képletébe, hogy $\Delta x' = 0$ hiszen az óra nem mozog L' -ben.



(a) L' rendszer



(b) L rendszer

3. ábra. Két azonos idejű esemény L'-ben nem azonos idejű L-ben és az távolságuk is megnő: $\Delta x = \gamma \Delta x'$ A mozgó rendszer sebessége $\beta = 0.6$.

$$\begin{aligned} \Delta t &= \gamma \Delta t' \\ \Delta x &= \gamma \Delta x' \end{aligned} \quad (28)$$

Az időkülönbség mérési utasítása szerint az L-ben mért időkülönbség a fenti Δt hiszen ezt az értéket olvassuk le az órákról:

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta t'} \quad (29)$$

Δx azonban nem 0, ami azt jelenti, hogy L'-ben az óra ketyegése egy helyben történik, de ez már nem igaz L-ben, ahogy azt az egyhelyűség relativitásánál már fentebb láttuk. **Az idődilatació fizikai jelentése az, hogy két esemény között eltelt idő a mozgó rendszerből nézve rövidebb, mint az álló rendszerből nézve.** Az elnevezés onnan jön, hogy a két esemény között az álló rendszerben eltelt idő biztos hosszabb mint a mozgó rendszerben mért időkülönbség, azaz az idő "megnyúlt" a mozgó rendszerből nézve.

A képlet alkalmazásánál gyakori hiba, hogy a vesszős és vesszőtlen rendszerek bevezetése után a fent levezetett összefüggést ez az egyben alkalmazzák az időtartamok transzformációjára. Ez azért helytelen, mert az időtartamokat a Lorentz-transzformáció alapján kell kiszámolni, amiben a tér is szerepel. A képletet érdemes a következőképpen érteni:

$$\text{álló rendszerben eltelt idő} = \gamma \text{ mozgó rendszerben eltelt idő} \quad (30)$$

Ha koordinátarendszerek standard elrendezésében vagyunk, akkor ez meg-
 egyezik a fentebb levezetett képlettel, mert a vesszős rendszer mozog. Ha
 viszont a vesszős rendszerből nézzük a vesszőtlen rendszert, akkor a vesszős
 megfigyelő szemszögéből a vesszőtlen látszik mozogni, és a képletben a vesszős
 és vesszőtlen koordináták helyet cserélnek. Abból is látható, hogy ennek így
 kell lennie, hogy a relativitás elve szerint a vesszős megfigyelő is ugyanazt
 kell tapasztalja mint a vesszőtlen: A vesszős megfigyelő szerint a vesszőtlen
 rendszerben telik lassabban az idő.

Megjegyzés Az idő és órák a fenti érvelésben elvont fogalmakként szere-
 pelnek ezért, hogy szemléletesebben érthessük az eredményeket vegyünk egy
 konkrét esetet. Az órák mindig valamilyen periodikus fizikai folyamat alap-
 ján működnek. Az intervallum levezetésében szereplő L' -ben lévő két tükör
 között pattogó fény hasonló periodikus folyamat. Az óra egy kattánása az az
 idő amíg a fény egyszer oda-vissza halad a tükrök közt. L -ből nézve a fény
 egy háromszög mentén halad (a két rendszer relatív sebessége miatt) és ezért
 más távolságot kell megtennie, ami azt jelenti, hogy az óra egy kattánása
 is más ideig tart. Ez az óra minden fizikai folyamat modellje. Mivel min-
 den fizikai folyamat így megy és egyformán lassul le, nem lehet érezni az idő
 lassulását a L' belül. A jelenség azért lép fel L -ben mert a két rendszerben
 a fizikai törvények azonossága (Relativitási elv) azt követeli meg, hogy a
 fizikai mennyiségek mérőszámai megváltozzanak, beleértve az eltelt időt is.

A hosszkontrakció Vegyünk egy l hosszúságú rudat L' -ben. Határozzuk,
 hogy a kiterjesztett megfigyelő utasítása alapján mekkorának méri ezt egy
 L -beli megfigyelő. **Fontos** Míg az idődilatáció levezetése megegyezett az
 egyhelyűségre vonatkozó számolással itt nem ez a helyzet. Ennek két fő oka
 van:

- a hossz mérési utasítása szerint az L -ből nézve egyidejűnek látszó
 távolságot kell kiszámolnunk. Ez azt jelenti, hogy most $\Delta t = 0$ és nem
 az L' -beli koordinátákra vannak megkötéseink.
- A rúd egy test és emiatt fundamentálisan különbözik két pontszerű
 eseménytől, amiket az egyidejűség és egyhelyűség relativitásánál viz-
 gáltunk. A rúd nagyon sok eseményt jelent együttesen, amik térben és
 időben is kiterjedt objektumot alkotnak, hiszen a rúdnek van hossza

(térbeli kiterjedés) és a vizsgálat ideje alatt folyamatosan létezik (időbeli kiterjedés). A rúd egy négy dimenziós (3 tér + 1 idő) térfogatot foglal el, aminek különböző megfigyelők különböző metszeteit látják. A rúd hosszának egy adott megfigyelő azt a távolságot méri, amit az ő inerciarendszere az ő rendszerében egy adott időpillanatban kimetsz ebből a 4 dimenziós térfogathoz. (Más rendszerekben a rúdnak mint 4 dimenziós objektumnak más pontjai tűnnek egyidejűnek, mert az a rendszer más pontokat metsz ki adott időpillanatban a 4 dimenziós térfogathoz)

Ekkor az (15) egyenlet:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta t = \gamma \Delta t' + \gamma \beta l \\ \Delta x &= \gamma l + \beta \gamma \Delta t' \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma l - \beta^2 \gamma l \\ \Delta x &= \gamma l (1 - \beta^2) \\ \Delta x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} l (1 - \beta^2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{l}{\gamma} = \frac{l}{\cosh(\Theta)} = l \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (33)$$

Emellett az is igaz, hogy $\Delta t' \neq 0$, azaz amit L -ben a bot két végének mérnek az L' -ben két különböző időpontbeli eseménynek felel meg! A kontrakció annak a következménye, hogy más-más az egyidejűség a két rendszerben ezért más mérünk hosszként, hiszen a hossz mérésének definíciójában benne van az egyidejűség feltétele. **A hosszkontrakció tehát azt jelenti, hogy a mozgó rendszerben egyidejű események távolsága az álló rendszerben rövidebbnek adódik, mint a mozgóban.** Az elnevezés oka az, hogy az álló rendszerből nézve a két esemény közötti távolság "összement". A hosszkontrakció esetében általában nincs probléma azzal, hogy felismerjük melyik rendszerben mért adatokat kell behelyettesíteni, mert tudjuk, hogy a rúd hossza l_0 a hozzá rögzített rendszerben. Problémák akkor merülnek fel amikor távolságokat akarunk transzformálni. Ekkor érdemes a következőképpen gondolni a hosszkontrakcióra:

$$\text{álló rendszerben mért hossz} = \frac{\text{együttmozgó rendszerben mért hossz}}{\gamma} \quad (34)$$

Ez a koordinátarendszerek standard elrendezése esetén a fentebb levezetett eredményt adja. Azonban ha a mozgó, vesszős rendszerbe helyezkedünk el és onnan nézünk egy, a vesszőtlen rendszerben elhelyezett méterrudat akkor felcserélődnek a vesszős és vesszőtlen koordináták szerepei. A képlet levezetése során végig feltettük, hogy a rúd a hozzánk képest mozgó rendszerben nyugszik, és ezt érvényesíteni kell a használat során. Ez a nehézség elkerülhető, hogy a "rúd eleje" és "rúd vége" eseményekkel dolgozzunk, és ezeket transzformáljuk, ekkor sosem kell felcserélnünk a koordináták szerepét, mert a Lorentz-transzformáció automatikusan jól kompenzál.

A fenti megfontolásból az is látható, hogy az L' beli megfigyelő az L -beli méterrudat tartja kontraháltnak, a relativitási elvvel összhangban.

Megjegyzés Milyen jogon hívjuk l -et a rúd hosszának? Ehhez visszafelé kell gondolkodni: Az L rendszerben az a rúd hossza, amit egyidejűnek detektálunk belőle, erre kaptuk ((33) egyenlet), hogy ez csak az L' rendszerbeli térbeli szeparációjától függ a "rúd eleje" és "rúd vége" eseményeknek, ami $\delta x'$. Ha $\beta = 0$ akkor a két rendszer nem mozog egymáshoz képest ezért $L = L'$ emiatt persze $\delta t' = 0$ automatikusan teljesül ($\beta = 0$ -át beírva a fenti levezetésebe ez belátható), ezt behelyettesítve a Lorentz-kontrakció egyenletébe azt kapjuk, hogy $\delta x = \delta x' = l$. Azaz egy olyan rendszerben amiben a rúd áll, természetesen nincs Lorentz-kontrakció, ez egyben a rúd saját rendszere, és a rúdhoz rögzített rendszerben "rúd eleje" és "rúd vége" események egyszerre történnek (a hossz definíciója miatt) és távolságukat a rúd **nyugalmi hosszának** nevezzük. Csak egyetlen olyan rendszer létezik, amiben a rúd nyugszik, ezért ez a hossz egyértelmű, és ezért hívjuk a rúd hosszának.

A hosszkontrakció és az idődilatáció szemléltetése Érdemes megvizsgálni, hogy a hosszkontrakció hogyan jelenik meg egy kicsit gyakorlatiasabb mérési elrendezésben, így segítve a fenti definíciókon alapuló levezetés megértését.

Vegyük a koordinátarendszerek standard elrendezését. L' -ben egy méterrúd nyugszik egyik vége az origóban (legyen ezen vég neve E) másik vége $\Delta x' = l_0$ pontban (legyen ezen vég neve V). Elhelyezünk egy órát az L rendszer origójában. Az L' rendszer origója az L origójától balra helyezkedik el a kiindulási helyzetben. Vegyünk két eseményt:

- **A:** A rúd V vége áthalad az L rendszer origóján (ez történik előbb).
- **B:** A rúd E vége áthalad az L rendszer origóján (ez történik később).

Az L rendszer megfigyelője úgy méri meg a rúd hosszát, hogy meghatározza mennyi idő telt el az A és B események közt szerinte, és ezt megszorozza a rúd sebességével. Ez pontosan az az eljárás a hossz mérésére, amit klasszikusan is használnánk. Pl. ha egy vonat hosszát megmérhetjük úgy, hogy megmérjük a sebességét és megmérjük mennyi idő telik el attól a pillanattól, hogy a vonat eleje elhagyta a stopperrel mérő megfigyelőt, egészen addig még a vonat vége halad el a megfigyelő mellett. Ha úgy tetszik ez a hossz mérés definíciója.

Hogy néz ki az A és B esemény az L' -ből, a rúddal együtt mozgó rendszerből?

- Legyen t'_V az az időpont amikor a rúd V vége áthalad az álló L rendszer origóján, ennek helykoordinátája az L' -ben $x'_V = l_0$.
- Legyen t'_E az az időpont amikor a rúd E vége áthalad az álló L rendszer origóján, ennek helykoordinátája az L' -ben $x'_E = 0$.

Ekkor $\Delta t' = t'_V - t'_E < 0$, (mert ami előbb történik annak kisebb az időkoordinátája) a mért értéket pedig onnan tudjuk, hogy megnézzük mi történik a rúdon utazó megfigyelő szempontjából. L' rendszer belülről a rúd β sebességgel közelít az L origó felé és azt látja, hogy az origóban lévő óra először elhalad a rúd V vége mellett majd β sebességgel megteszi a rúd két vége közti utat, így $\frac{l_0}{\beta}$ idő alatt odaér a rúd E végéhez. Így az A és B események térbeli és időbeli elválasztása az L' rendszerben:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= -\frac{l_0}{\beta} \\ \Delta x' &= l_0\end{aligned}\tag{35}$$

Az L belülről megfigyelő úgy számolja ki a rúd hosszát, hogy megméri az A és B események között szerinte eltelt időt (Δt) és ezt megszorozza a rúd sebességével β :

$$l = \Delta t \beta\tag{36}$$

Δt -t ami az A és B események közti időkülönbség L -ben könnyen kiszámolhatjuk az L' belülről időkülönbségükből (ami ismert) a Lorentz-transzformációt felhasználva:

$$\begin{aligned}
\Delta t = t_V - t_E &= \gamma \Delta t' + \gamma \beta \Delta x' \\
&= -\frac{l_0}{\beta} \gamma + \gamma \beta l_0 \\
&= \gamma l_0 \left(-\frac{1}{\beta} + \beta \right) \\
&= -\gamma l_0 \frac{1 - \beta^2}{\beta} \\
&= -l_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}
\end{aligned} \tag{37}$$

Az eredmény negatív mert A előbb történik mint B. Fontos, hogy a Δt kiszámolásához szükség volt $\Delta t'$ -re és $\Delta x'$ -re is! Ez is azt mutatja, hogy a rúd egy négy dimenziós objektum. Végül az L rendszer beli megfigyelő szerint a rúd hossza:

$$\begin{aligned}
l &= \beta |\Delta t| \\
&= l_0 \sqrt{1 - \beta^2}
\end{aligned} \tag{38}$$

Azaz a rúd hosszát rövidebbnek méri az L beli megfigyelő a Lorentz-transzformáció miatt. Ez nem meglepő az L' beli megfigyelő számára aki úgy látja, hogy a hozzá képest mozgó, origóban elhelyezett óra lassabban jár, így kevesebb időt mér a rúd áthaladására mint amit szerinte kellene (idődilatáció!). Felhasználva az idődilatációról tanultakat:

$$\begin{aligned}
\Delta t' &= \gamma \Delta t \\
l &= \Delta t \beta = \frac{1}{\gamma} |\Delta t'| \beta \\
l &= \frac{1}{\gamma} \frac{l_0}{\beta} \beta \\
l &= l_0 \sqrt{1 - \beta^2}
\end{aligned} \tag{39}$$

Ami ugyanaz az eredmény, mint amit Lorentz-transzformációval kaptunk. Fontos, hogy mikor használtuk az idődilatáció képletét akkor a rúdhoz rögzített rendszer volt az álló rendszer, ezért kellett felcserélni a vesszős és vesszőtlen időkülönbségeket. Az idődilatáció és hosszkontrakció kifejezését sosem szabad vakon használni, mindig tisztázni kell, hogy melyik rendszert tekintjük állónak és melyiket mozgónak, és ez alapján behelyettesíteni. Ez

a probléma teljesen elkerülhető ha eseményekkel dolgozunk, akkor a vesszős rendszer és a vesszőtlen közötti áttérést a Lorentz-transzformáció képletei megadják. Az ár amit fizetünk azért az, hogy a számolás kicsit komplikáltabb.

Összefoglalás Összehasonlítva a hosszkontrakció (33) és az idődilatació (29) képletét láthatjuk, hogy a mozgó rendszerben adott nyugalmi hossz és lokális idő másképpen transzformálódik az L -be. Az időtartamok megnyúlnak és a hosszok megrövidülnek. Szemléletesen, ha az L' úrhajó rendszert méterrudakból és órákból álló 3 dimenziós rácshálózatnak képzeljük el, ahol a rácspontokban órák vannak, akkor ez a rendszer L -ből nézve a mozgás irányában belapult palacsintának tűnik, amiben lassított felvételhez hasonlóan telik az idő.

Az egyidejűség és egyhelyűség relativitása és az intervallum kapcsolata Ez a két jelenség az intervallum invarianciájára vezethető vissza: a térbeli és időbeli koordináták különbsége nem állandó csak a belőlük képzett kombináció:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 \quad (40)$$

Mivel Δs állandó, ha egy másik rendszerben Δx különbözik, nincs meglepés a következtetés elől, hogy Δt is különbözni fog. Az, hogy pontosan mi lesz az értéke az új rendszerben azt a Lorentz-transzformáció pontosan megmondja. Ha két esemény L' -ben egy időben történik $\Delta t' = 0$ egymástól $\Delta x' = l$ távolságra akkor az L rendszerben:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \sinh(\Theta)l \\ \Delta x &= \cosh(\Theta)l \end{aligned} \quad (41)$$

Azaz L -ben ezek nem egyidejűek és az őket elválasztó l távolságtól függ mennyire különböző az időbeli és térbeli elválasztásuk. A jelenség mögött az áll, hogy az L és L' -beli megfigyelő is szinkronizálja az óráit a saját rendszerében egy fényjellel, de ez a két szinkronizáció nem egyezik meg. Ha mindketten az origóban lévő órából kiindulva szinkronizálnak és akkor mikor a két rendszer origója egybeesik, akkor látható, hogy a fényjel a két rendszerben az origótól egység távolságra lévő órákat $1/c$ idő alatt éri el mindkét megfigyelő szerint, de az origótól a másik rendszerben egység távolságra lévő órákat nem mert az az óra mozog az origóból induló fényjelhez képest. Azért

nem ütközünk mégis ellentmondásba mert a fény mindkét megfigyelő számára ugyanakkora sebességgel mozog. **Az egyidejűség relativitása azt jelenti, hogy két egymáshoz képest mozgó inerciarendszerben az órákat nem lehet egységesen, mindkét rendszer számára konzisztens módon szinkronizálni.**

Hasonló érvelés hozható fel az egyhelyűség relativitásának magyarázatára is.

A newtoni határeset A Lorentz-transzformáció levezetésénél szó volt róla, hogy a newtoni mechanika nem invariáns a Lorentz-transzformációra. Ez látszólag ellent monda annak a ténynek, hogy a mechanika kísérletileg nagyon alátámasztott elmélet. A feloldás az, hogy kis sebességek esetén a Lorentz-transzformáció úgy viselkedik, mint a Galilei amire már invariáns a mechanika. Ezt egyszerű látni, ha felhasználjuk, hogy:

$$\begin{aligned}v/c &\approx 0 \\ \beta &\approx 0 \\ \gamma &\approx 1\end{aligned}\tag{42}$$

Ezt beírva (12)-be:

$$\begin{aligned}t &= t' \\ x &= vt' + x'\end{aligned}\tag{43}$$

Ami a Galilei-transzformáció. Ez azt jelenti, hogy ha $v/c \ll 1$ akkor a newtoni mechanika viszonylag jó közelítés. Ilyenkor a két egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszer viszonylag kis hibával szinkronizálható, így látszólag van globális egyidejűség.

2.3.3. A müion kísérlet

Fentebb hosszkontrakciót és idődilatációt a Lorentz-transzformációból vezetjük le. Ezek a relativitáselmélet jóslatai amiket kísérletileg ellenőrizni kell. Egy ilyen kísérlet a Föld felső légkörében keletkező müionok számának megfigyelése. A felső légkörben keletkező részecskéknek csak egy részét tudjuk a felszínen detektálni ugyanis a részecskék elbomlanak mire a felszínre érnek. Laboratóriumban megmérték, hogy mekkora a müionok felezési ideje azaz, hogy mennyi idő alatt bomlik el a részecskék fele. Ez alapján kiszámítható, hogy mennyi részecskét kellene detektálni a felszínen figyelembe véve, hogy

tudjuk hány keletkezik a magas légkörben. **A mérések szerint sokkal kevesebb részecske bomlik el út közben, mint kellene.** Hogy lehetséges ez? A részecskék igen nagy sebességgel $v = 0.98c$ -vel mozognak ezért relativisztikus effektusok következménye, hogy tovább élnek. A jelenséget 3 szemszögből fogjuk megvizsgálni, hogy jobban értsük a relativisztikus effektusokat.

Nem relativisztikus számolás

- távolság: $L = 10^4$ m
- sebesség: $v = 0.98c$
- felezési idő: $T_{1/2} = 1.56 * 10^{-6}$ s
- részecskék száma: $N_0 = 10^6$

A részecskék az utat $T = \frac{L}{v} = 34 * 10^{-6}$ s alatt teszik meg. Ez alatt a kezdeti részecskéknek csak egy része él túl:

$$N = N_0 * 2^{-T/T_{1/2}} = 0.27 \quad (44)$$

De ez nem az az eredmény amit mértek!

A földi megfigyelő szemszögéből relativisztikusan A földi megfigyelő számára $T = \frac{L}{v}$ idő telik el mire a részecskék elérik a felszínt, azonban a részecske idődilatáción megy keresztül, azaz a földi megfigyelő

$$T = \cosh(\Theta)T' = \gamma T' = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.98^2}} T' = 5T' \quad (45)$$

időt detektál, de a részecske rendszerében eltelt időt csak T' -nek méri. Mivel a részecskék bomlását a saját rendszerükben eltelt idő befolyásolja a bomlás számolásához, T' -t kell felhasználni:

$$N = N_0 * 2^{-T'/T_{1/2}} = N_0 * 2^{-T/(5T_{1/2})} = 49000. \quad (46)$$

Azaz jóval több részeke marad életben az idődilatáció miatt. Felmerül a kérdés, hogy mi történik a részecske szemszögéből hiszen csak az álló rendszerből nézve lassul le az idő, a részecske ebből nem érez semmit.

A részecske szemszögéből relativisztikusan A részecske rendszeréből nézve az idő teljesen normálisan telik, azonban a földi megfigyelő világa hosszkontrakciót szenved a részecske szemszögéből: Ami a földi megfigyelő számára 1 méternek tűnik az a részecske rendszeréből nézve kevesebb:

$$L = \cosh(\Theta)L' = \gamma L' = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.98^2}}L' = 5L' \quad (47)$$

$$L' = L/5$$

Ezt a távolságot a müon $T_{muon} = \frac{L'}{v} = \frac{L}{5v} = 6.8 * 10^{-6}$ s alatt teszi meg, ami kevesebb mint amit az álló megfigyelő mér, annak mintegy ötöde. Ez alatt az idő alatt is bomlanak a részecskék de jóval kevesebb mint a nem relativisztikus esetből gondolnánk:

$$N = N_0 * 2^{-T_{muon}/T_{1/2}} = 49000 \quad (48)$$

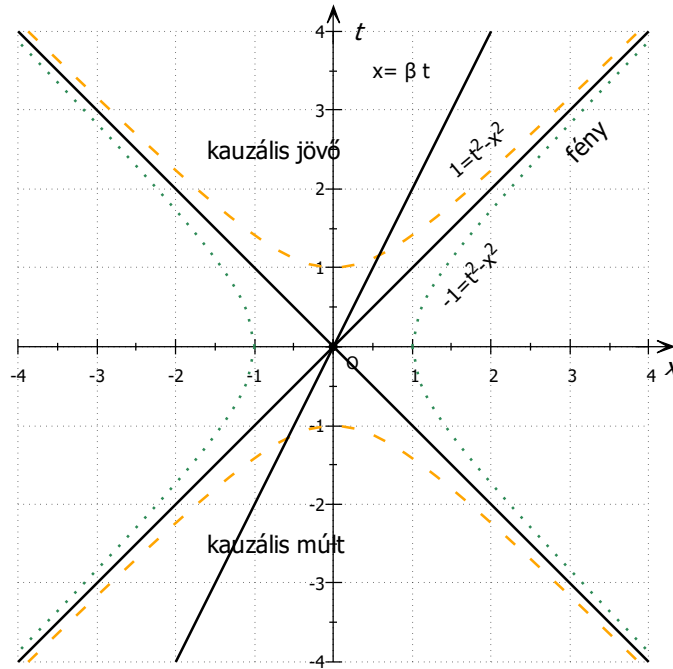
Ez teljesen megegyezik a másik relativisztikus megfigyelőre vonatkozó számolással, és mindkettő különbözik a nem-relativisztikus esettől. Mivel a mérési eredmények szerint a relativisztikus számolás a helyes, ez egy újabb kísérleti eredmény ami a relativitáselméletet támasztja alá.

2.4. Minkowski-téridő

A Lorentz-transzformáció segítségével már bármilyen események koordinátáit transzformálhatjuk egyik rendszerből a másikba, a képletek alkalmazása azonban nem mindig szemléletes, ezért érdemes megismerkedni a téridő-diagrammal. Ez segít rendszerbe foglalni a relativisztikus transzformációkat, és kis változtatásokkal a síkgeometriában kialakult intuícióinkra támaszkodhatunk feladatok megoldása közben. A téridő-diagram segít 4 dimenzióban gondolkodni ami a testek és a téridő szerkezetének valós természete, így nem kell hasonlatok segítségével értelmeznünk a jelenségeket. Mivel az inercia-rendszerek standard elrendezésében a Lorentz-transzformáció nem érinti az y, z koordinátákat ezeket nem tüntetjük fel a diagramon. Az $x - t$ koordinátákat síkban ábrázolva egy koordinátarendszert kapunk ami az L rendszert írja le.

2.4.1. A Téridő-diagram

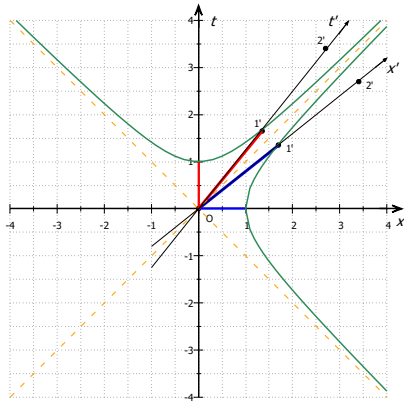
A 4. ábrán látható, az L rendszerre vonatkozó diagram, melynek részei:



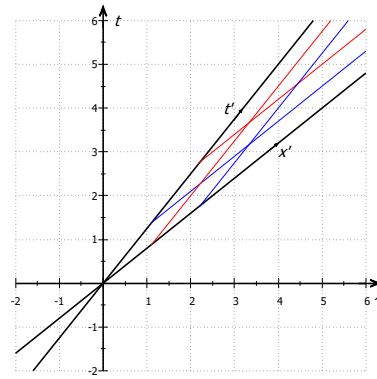
4. ábra. A téridő-diagram részei

- **x-tengely** : L x-tengelye, mindent m -ben mérünk
- **t-tengely** : L -ben eltelt idő, melyet $1m/c \approx 3,3 ns$ -ben mérünk, ami $1 m$ időnek felel meg.
- **fény** : A fény a fenti egységekben $c = 1$ sebességgel terjed, hiszen $\beta = v/c = c/c = 1$. Egy az origóhoz képest β **sebességgel mozgó test** sebesség-idő grafikonja: $x = \beta t$ azaz $t = \frac{x}{\beta}$ függvénynek felel meg a grafikonon. Ha $\beta = 1$ ez egy ± 45 fokos egyenes. (az egyik a $+x$ a másik a $-x$ irányba terjedő fényt írja le.)
- A $0-1$ között L -ben elhelyezett méterrúd két végéhez tartozó intervallum : $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0 - 1$. Ezt $t(x)$ függvényként kifejezve: $t = \sqrt{\Delta x^2 - 1}$, ami egy hiperbolát ír le a diagramon.
- Az L origójában elhelyezett órán eltelt 1 másodpercnek megfelelő intervallum: $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = 1 - 0$, ami $t(x)$ függvényként felírva: $t = \pm\sqrt{1 + \Delta x^2}$, ami egy 90 fokkal elforgatott hiperbolát ír le.

- **kauzális jövő** : Az origóból induló bármilyen hatás, vagy jel maximum fénysebességgel terjed, ezért csak a fényt jelentő egyenesek által határolt tartományon belüli eseményeket befolyásolhatja a pozitív t tengelynek megfelelő tartományban. Ezek a pontok az origó kauzális jövőjébe tartoznak.
- **kauzális múlt**: Az origóba érkező bármilyen jel vagy kölcsönhatás maximum fénysebességgel érkezik, ezért az origót befolyásoló hatások csak a negatív t -tengelynek megfelelő tartomány fényt jelentő egyenesek által határolt részéből érkehetnek. Ez az origó kauzális múltja.
- **események**: A diagram (t, x) pontjai felelnek meg a tér-idő eseményeinek.



(a) Az L' rendszer az L diagramján



(b) Az L' koordinátavonalai

Mozgó megfigyelő A következő lépés, hogy az L' rendszert is feltűntetjük a diagramon (az inerciarendszerek standard elrendezését vesszük). Ehhez használjuk fel a Lorentz-transzformáció (15) képletét. Ezt mutatja be az 5a. ábra.

- **x' -tengely**: Az L' -rendszer x' -tengelyének egyenlete: $t' = 0$. Ezt helyettesítjük a (15)-be és kifejezzük a $t(x)$ függényt.

$$\frac{x}{t} = \frac{\gamma x'}{\gamma \beta x'} \quad (49)$$

$$t = \beta x.$$

Ami egy egyenes β meredekséggel.

- **t'-tengely:** Ennek egyenlete $x' = 0$. Az előzőhöz hasonló helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{\gamma \beta t'}{\gamma t'} \\ t &= \frac{x}{\beta} \end{aligned} \quad (50)$$

Ami egy egyenes $1/\beta$ meredekséggel.

- **x'-skála:** Az 1 m-es méterrúdhöz tartozó intervallum minden vonatkoztatási rendszerben azonos, ezért a 4. ábrán bemutatott hiperbola ami $x = 1$ -ben metszi az x-tengelyt az x'-tengelyt is 1-ben metszi:

$$\begin{aligned} -1 &= \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \\ \Delta t' &= \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

- **t'-skála:** Az egységnyi időkülönbséghez tartozó intervallum minden inerciarendszerben ugyanaz, ezért a 4. ábrán bemutatott elforgatott hiperbola ami $t = 1$ -ben metszi a t-tengelyt a t'-tengelyt is 1-ben metszi.

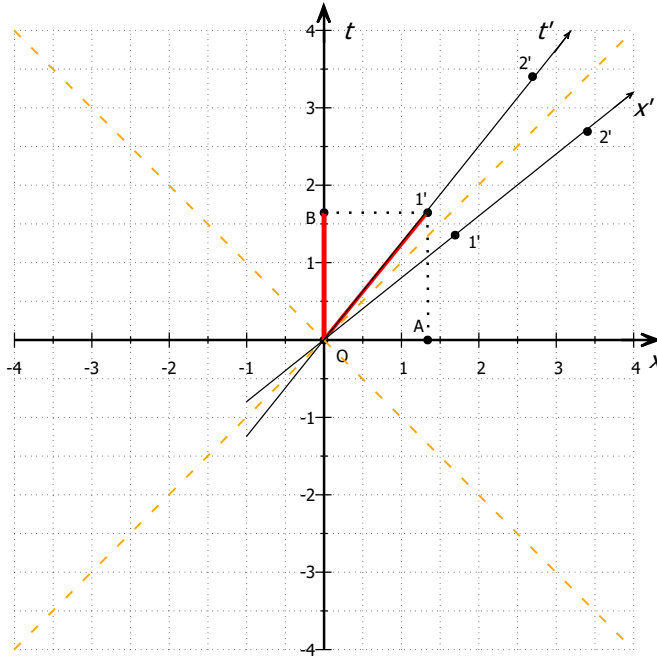
$$\begin{aligned} 1 &= \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \\ \Delta x' &= \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

- Az L' rendszerben ahogy L -ben is a koordinátavonalak a tengelyekkel párhuzamosak, ezt mutatja a 5b. ábra.
- Látható, hogy az L és az L' rendszer skálája nem egyezik meg, ezt figyelembe kell venni leolvasáskor.

2.4.2. Események koordinátái és távolságok a diagramon

Azonos helyűség és idődilatáció Ezeket a jelenségeket már megvizsgáltuk a Lorentz-transzformáció kapcsán, most a téridő-diagramon is szemléltetjük őket. Vegyünk két eseményt az L' rendszer origójában melyeket egységnyi idő választ el (pl óraketyegés). A részleteket a 6. ábra mutatja.

- A két azonos helyű eseményt elválasztó időtartam $\Delta t' = O1'$ szakasz. Igaz, hogy $\Delta x' = 0$.



6. ábra. Azonos helyű események L' -ben

- A két esemény időkoordinátái közötti különbség L -ben a $\Delta t = OB > 1$ szakasz. Azaz az egységnyi hosszú időtartamnak L -ben egynél hosszabb időtartam felel meg. Ez az idődilatáció:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (53)$$

- A két esemény közötti távolság L' -ben 0, viszont L -ben nem az. Leolvasható, hogy $O1'$ x tengelyre eső vetülete OA . Ez az azonos helyűség relativitása.
- a szakaszok pontos hosszát a Lorentz-transzformációba (15)) helyettesítve kiszámolhatjuk, de az ábra nagyon hasznos a kvalitatív eredmény szempontjából. Ahhoz, hogy megtudjuk egy szakasz, egy esemény, koordinátáit L -ben. elég csak leolvasni a koordinátákat események esetén, illetve levetíteni a szakaszt a t , vagy az x tengelyre.
- **Hiperbolikus geometria** A szakaszok hossza és (így az idődilatáció) kiszámítható csak a 2. ábra segítségével, a lorentz-transzformáció

képletének felhasználása nélkül. Ehhez csak egy szabályt kell megjegyezni: **A Pitagorasz tétel nem igaz: $\Delta t'^2 \neq \Delta t^2 + \Delta x^2$, helyébe a következő összefüggés lép: $\Delta t'^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$** Miért? Az, hogy a Pitagorasz-tétel nem igaz, már onnan is sejthető, hogy az x' és t' tengelynek más a skálája, mint az x -nek és t -nek. Az ábrán is az $O1'$ szakasz hosszabb mint az $O1$, de fizikailag ugyanolyan hosszúnak kell lennie. Tehát az eltérés a skálák eltérésnek következménye, amit az intervallum invarianciáját felhasználva állítottunk be. A fentiek érdekes következménye tehát, hogy a 4 dimenziós téridőben a hosszat (mely most már az idő dimenzió irányában mért távolságot is tartalmazza) másképp kell mérni. Ezt úgy mondják, hogy a téridő nem Euklideszi, hanem **hiperbolikus**. Összehasonlítás a két hossz definíció között:

$$\begin{aligned}
 & \textit{Euklideszi-geometria} \\
 \Delta s^2 &= \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \\
 & \textit{hiperbolikus-geometria} \\
 \Delta s^2 &= \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)
 \end{aligned} \tag{54}$$

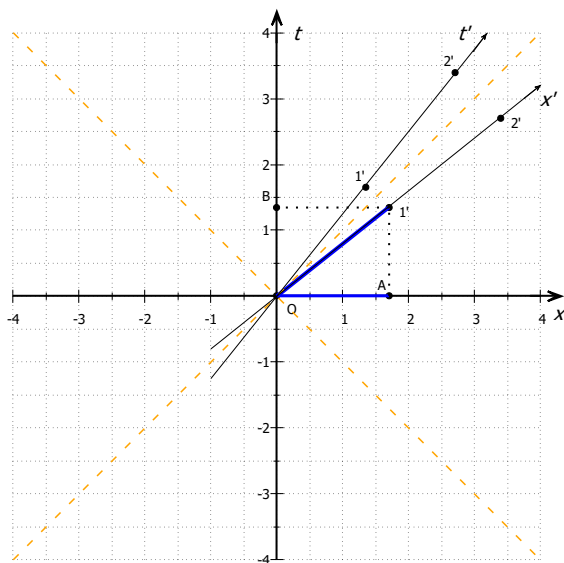
Ezek az összefüggések minden vonatkoztatási rendszerben igazak, ami azt jelenti, hogy az események közötti négy dimenziós távolság nem változik az inerciarendszerek között, úgy ahogy két pont közötti távolság sem változik amiatt, hogy máshonnan nézzük a pontokat.

- **Idődilatáció** Két L' -beli esemény közötti időt úgy kell kiszámolni L -ben, hogy a koordinátáikat leolvassuk t -n, és kivonjuk őket egymásból. Ez megfelel a két eseményt összekötő szakasz t -tengelyre történő vetítésének. Mindezeket felhasználva számoljuk ki az idődilatáció képletét

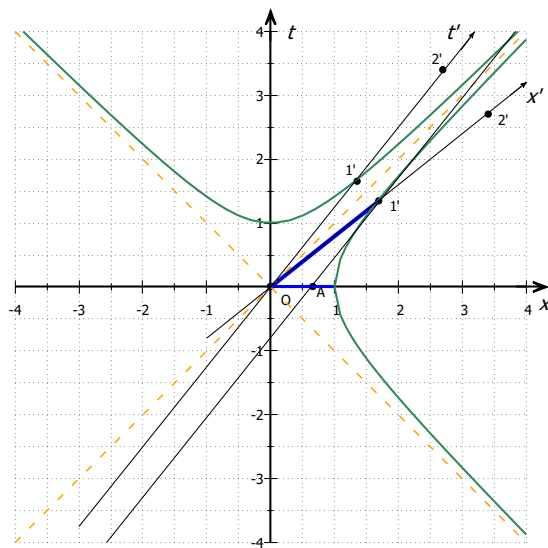
$$\begin{aligned}
 OB &= \frac{OA}{\beta} \quad t'\text{-tengely egyenlete} \\
 O1'^2 &= OB^2 - OA^2, \quad \textit{hiperbolikus geometria} \\
 O1'^2 &= OB^2(1 - \beta^2), \\
 OB &= \frac{O1'}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \end{aligned} \tag{55}$$

Egyidejűség relativitása, hosszkontrakció Az L' -ben vegyünk egy origóban elhelyezett méterrudat. Ezen rúd végei két egyidejű eseményt jelen-

tenek L -ben. ezért a rúd párhuzamos az x' -tengellyel és a 0-1 pontok között húzódik. A részleteket a 7a. ábra mutatja.



(a) Egyidejűség



(b) hosszkontrakció

- Az $O1'$ szakasznak az x -és a t -tengelyre nézve is van vetülete: $\Delta x = OA$ valamint $\Delta t = OB$, azaz az L' -ben egyidejű események L -ben nem az.

Az is látható, hogy $O1' > OA$, ami a hiperbolikus geometria megnyilvánulása: a háromszög átfogója rövidebb mint bármelyik befogója.

- A rúd végpontjai az L -ből nézve két β sebességgel mozgó pont. A sebesség-idő grafikonjaik: $x = \beta t$ a bal oldali végpontra, és $x - a = \beta t$ a jobb oldali végpontra. A jobb oldali végpont világvonala a rúd látszólagos hosszával az x tengellyel párhuzamosan eltoltt egyenes. Másképp: mindkét végpont L' -ben áll, tehát a t' -tengellyel párhuzamosan mozognak (csak a t' koordinátájuk változik L' -ben, mert múlik az idő), ezért húzunk mindkét ponton keresztül egy-egy t' -vel párhuzamos egyenes, hogy megtudjuk az út-idő grafikonjaikat.
- ökölszabályként elmondható, hogy ha egy rudat felgyorsítunk akkor a tér-idő diagramon elfordul a 45 fokos egyenes felé, minél gyorsabban mozog annál jobban.
- **Hosszkontrakció:** a szerkesztést a 7b. ábra mutatja. Fontos, hogy a hosszkontrakcióhoz nem egyszerűen vetíteni kell a rúd hosszát az x -tengelyre, hanem azt kell megnézni, hogy egy adott időpillanatban milyen hosszúságú szakaszt metsz ki a rúd a $t = \text{const}$ egyenesből. (A hosszmérés definíciója az, hogy megnézzük mennyit látunk belőle egy adott időpillanatban.) Az $O1'$ szakasz önmagával párhuzamosan eltolva mozog, mintha két végpontja O és $1'$ a t' -vel párhuzamos egyeneseken mint síneken futna, miközben a rúd x -tengellyel bezárt szöge nem változik. Mikor az $O1'$ szakasz mozgása során áthalad az x -tengelyen az OA szakaszt metszi ki belőle. Minden adott $t = \text{const}$ x -tengellyel párhuzamos egyenesből ugyanilyen hosszúságú szakaszt metsz ki, csak a kimetszett szakasz végpontjai más x -koordinátákkal rendelkeznek, azt a látszatot keltve, mintha egy OA hosszúságú szakasz mozogna.
- A hosszkontrakció képlete is levezethető az ábráról (Δx és Δt $O1'$ -nek x -és t -tengelyre eső vetületei, $OA = a$):

$$\begin{aligned}
0 - O1'^2 &= \Delta t^2 - \Delta x^2 && \text{hiperbolikus geometria} \\
\Delta x\beta &= \Delta t && x'\text{-tengely egyenlete} \\
\Delta t &= \frac{\Delta x}{\beta} && t'\text{-tengely egyenlete} \\
\Delta t &= \frac{\Delta x - a}{\beta} && \text{eltolt } t'\text{-tengely egyenlete} \\
&\Downarrow && \\
a &= \Delta x(1 - \beta^2) \\
O1' &= \Delta x\sqrt{1 - \beta^2} \\
&\Downarrow && \\
a &= O1'\sqrt{1 - \beta^2} && \text{A hosszkontrakció képlete}
\end{aligned} \tag{56}$$

2.4.3. Pajta-paradoxon

A téridő diagramok hasznosságát nagyon jól mutatja a következő "paradoxon": Egy 15 m hosszú rudat nagy sebességgel párhuzamosan mozgatunk az x-tengely mentén. Az x-tengellyel párhuzamosan egy 10 m hosszú pajta áll. Ha elég gyorsan mozog a rúd ahhoz, hogy a hosszkontrakció miatt 5 m-rel kevesebbnek tűnik akkor pont befér a pajtába. A rúd szemszögéből nézve azonban a pajta mozog, és ennek a hossza rövidül meg 6,6 m-re, ezért a rúd nem fér be! Úgy tűnik ellentmondásra jutottunk, azonban ha felrajzoljuk a téridő diagramot a kérdés fel se merül. Az eseményeket a 8. ábra mutatja. A feloldás az egyidejűség relativitása. A rúd vonatkoztatási rendszeréből nézve a elejének és végének áthaladása a pajta bejáratán és kijáratán nem történik egyszerre, ezért nem szükséges, hogy teljesen beleférjen a Lorentz-kontrakciót szenvedett épületbe. Kövessük végig az eseményeket.

- $\mathbf{t_1}$: A rúd eleje eléri a pajta bejáratát. Ez az L' -ben t'_1 időpontban történik. (L' koordinátavonalai ferdek, az eseményt jelentő ponton kell x' -vel párhuzamos egyenest húzni ami elmetszi t' -t az esemény időpontjában.)
- $\mathbf{t_2}$: A rúd eleje eléri a pajta végét, L' -ben t'_2 .
- $\mathbf{t_3 = t_2}$: a rúd vége eléri a pajta elejét. Ez az esemény L -ben egy időben történik azzal, hogy rúd eleje eléri a pajta végét, ezért a rúd

kontrahált hosszának bele kell férnie a pajtába. Ez a két esemény nem történik egyszerre! $t'_2 \neq t'_3$. A rúd eleje először eléri a pajtát, majd áthalad rajta, kis idő múlva pedig a vége eléri a pajta elejét, de ekkor már a rúd eleje rég nincs a pajtában.

- \mathbf{t}_4 A rúd vége eléri a pajta kijáratát, L' -ben t'_4 -ben.

A testekre érdemes úgy gondolni, mint 4 dimenziós objektumokra, amiknek a térbeli térfogata mellett van "időbeli térfogata" is:

$$V_4 = V \Delta t. \quad (57)$$

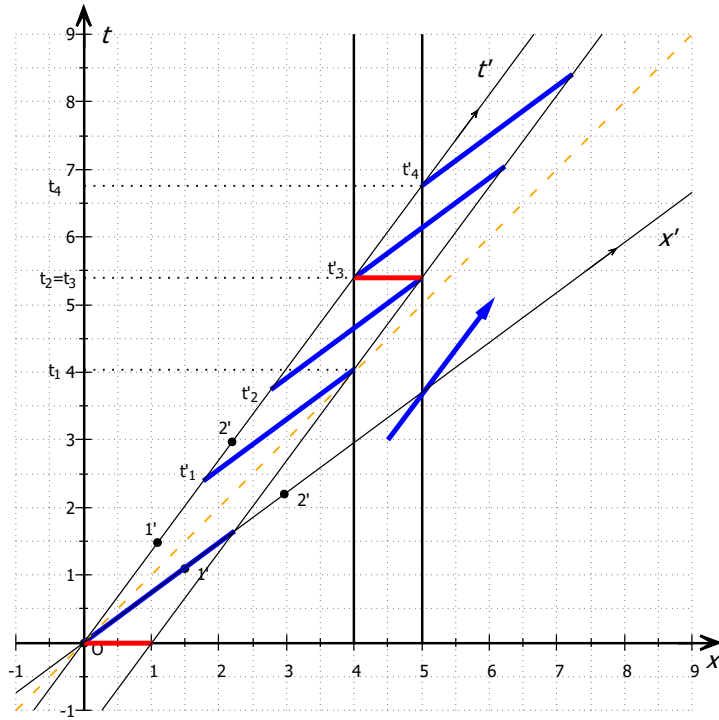
Mikor a testek mozognak akkor abban a koordinátarendszerben ahol ez a mozgás történik az alakjuk torzul, de ez a négyes térfogat nem változik meg ettől:

$$\begin{aligned} V_4 &= \Delta t l_x l_y l_z \\ &= \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} l_x \sqrt{1 - \beta^2} l_y l_z \\ &= \Delta t' l'_x l'_y l'_z \end{aligned} \quad (58)$$

Az álló rendszerben lévő megfigyelő ennek a torzult térfogatnak az adott idejű illetve adott helyű metszeteit látja. Ez alapján teljesen érthető, hogy a rúd befér a pajtába, hiszen a rúd nem az a amit naívan látunk belőle, hanem egy 4 dimenziós test aminek az alakja eltorzul, és ez fér be a 4 dimenziós pajtába. Azért is kell 4 dimenziós testként gondolnunk a rúdra, mert ha megnézzük a 8. ábrán a pirossal jelölt kontrahált hosszt, látható, hogy ez nem a rúd egy idejű részeiből áll, hanem azon pontok alkotják amiket rúd különböző időpontokban érint amikor áthalad az x-tengelyen. Ez azt jelenti, hogy amit L -ben rúdként ismernek fel, az a 4 dimenziós rúd térben és időben különböző pontjaiból áll össze! Ez nem csak analógia, a négyes térfogat minden egyes része ugyanolyan fontos, mert a Lorentz-transzformáció egyenrangúan keveri a tér és az idő komponenseket.

2.4.4. Sajátidő

A mozgó megfigyelő rendszerében álló óra által mért időt sajátidőnek nevezük. Ez az az idő amit a megfigyelő a saját karóráján leolvas, azaz mindig a megfigyelőhöz rögzített rendszerben mért idő. Ez azért fontos, mert minden



8. ábra. A pajta rendszeréből nézve a $\beta = 0.74 \rightarrow \gamma = 0.667$ sebességgel mozgó rúd. Minden beosztás 10 m-t jelent.

megfigyelő ugyanannyinak méri ezt az időt. Miért? A sajátidőhöz tartozó intervallum:

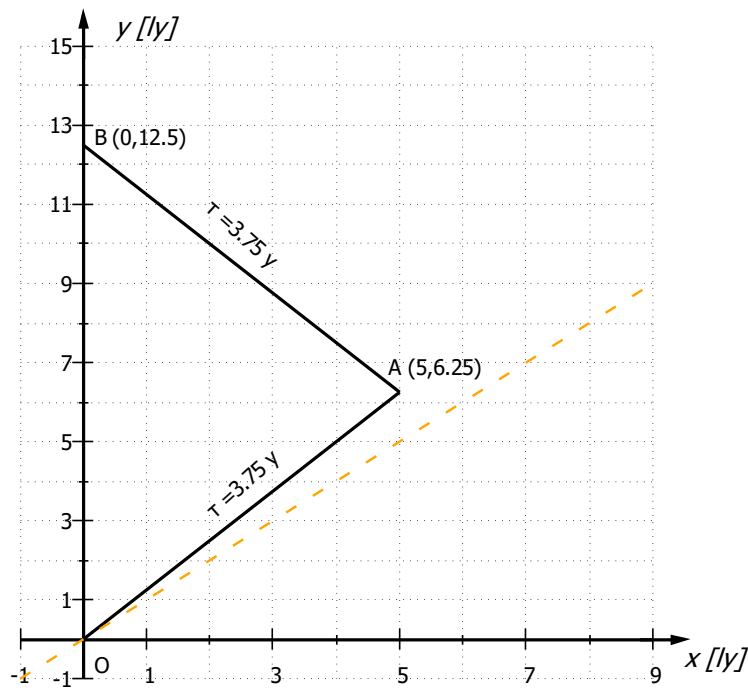
$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta t'^2 - 0 = \Delta \tau^2 \\ \text{és } \Delta s^2 &= \Delta t^2 - \Delta x^2. \end{aligned} \tag{59}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta \tau = \sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2} \quad \text{sajátidő}$$

Mivel az intervallum invariáns, így a sajátidő is az. A sajátidő a téridő diagramon az L' rendszer t' -tengelyén mért hosszúságnak felel meg, hiszen a megfigyelő a saját rendszerében áll az $x' = 0$ pontban. A sajátidő fogalmára példaként nézzük meg az ikerparadoxont. A Földön egy ikerpár egyik tagja a sci-fi űrhajóra ül, és fénysebességhez közeli sebességgel meglátogat egy másik bolygót. Küldetése végeztével visszatér a Földre hasonló módon, és azt tapasztalja, hogy fiatalabb mint itthon maradt testvére. Hogy lehet ez? Hogy egyeztethető ez össze, azzal, hogy az inerciarendszerek egyenran-

gúák? Az űrhajó szemszögéből nézve a Föld mozog, így szimmetrikusnak tűnik a helyzet, akkor nem ugyanazt kellene tapasztalnia a két testvérnek? Rajzoljunk téridő diagramot.



9. ábra. Az origóból induló űrhajó $\beta = 0.8$ sebességgel halad 5 fényévet majd megfordul és ugyanekkora sebességgel visszaér az origóba. (a tengelyeken minden fényévben van mérve)

A 9. ábra mutatja az űrhajó útját a Földhöz rögzített nyugalmi rendszerben. Az időt és a teret méterek helyett fényévben mérjük, ami nagyon kényelmes, mert 1 fényév idő, pont egy év időnek felel meg hagyományos rendszerben. (Hiszen 1 m idő az ami alatt a fény 1 m-et megtesz, és ezért 1 fényév idő az az idő ami alatt a fény 1 fényévet megtesz ami 1 év.). Az OA

pontok között eltel sajátidő az űrhajó fedélzetén (59) alapján:

$$\begin{aligned}
 \Delta\tau &= \sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2} \\
 &= \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\beta^2} - \Delta x^2} \quad \text{hiszen} \\
 \Delta x &= 5 \text{ ly} \\
 \Delta t &= \frac{\Delta x}{\beta} = \frac{5 \text{ ly}}{0.8} = 6.25 \text{ ly} \\
 &\Downarrow \\
 \Delta\tau &= 3,75 \text{ ly}
 \end{aligned} \tag{60}$$

Az AB szakaszhoz tartozó sajátidő pont ugyanennyi, mert a hozzá tartozó Δt és Δx is ugyanannyi, csak ellentétes előjelű. Így a teljes OAB útvonalon az űrhajóban eltelt idő **7.5 év**. A Földön eltelt idő a B pont koordinátáiról olvasható le **12.5 év**. Elkerülhetetlen a következtetés, hogy a két rendszerben eltelt idő különbözik, és az űrhajón utazó testvér valóban fiatalabban tér vissza mint a Földön élő fivére. Ez az állítás azért nem mond ellent az ekvivalencia elvnek, mert **az űrhajó rendszere nem inerciarendszer**, ugyanis az űrhajó nem egyenesvonalú egyenletes sebességű mozgást végez! A sebessége az 5. fényév elérése után nagyon rövid idő alatt az ellentétére változik, azaz hatalmas gyorsulásnak van kitéve. A gyorsulás miatt a két rendszer megkülönböztethető, ugyanis a gyorsulás érezhető az űrhajón belül, a Földi megfigyelő nem gyorsul soha sem, ezért a két testvér tapasztalatai nem egyeznek meg teljesen.

2.5. Impulzus és energia

A klasszikus mechanikában az energia és az impulzus alapvető szerepet tölt be a testek mozgásának leírásában, azonban ezek a mennyiségek a newtoni mechanikából származnak, amiről már kiderült, hogy nem invariáns a Lorentz-transzformációra nézve. Ebből következik, hogy a hagyományos értelemben vett impulzus és energia sem invariáns a Lorentz-transzformációra nézve, ezért az első feladat, hogy megtaláljuk ezen mennyiségek relativitáselméletbeli megfelelőjét.

2.5.1. Négyesvektorok

Négyes helyvektorok A newtoni mechanikában adott t időpontban egy tömegpont helyét a térben a helyvektor adja meg:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (61)$$

A sebességet és a gyorsulást \mathbf{r} t szerinti deriválásával kapjuk:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Ezek a definíciók azért nem jók a relativitáselméletben, mert a Lorentz-transzformáció keveri a tér és idő koordinátákat, így a fenti kifejezések nem invariánsak. A megoldás hasonló mint amit a Lorentz-transzformáció levezetésénél is láttunk: az idő komponenst is figyelembe kell venni. Mivel a relativitáselméletben 3+1 dimenziós téridőben kell gondolkodni és az eseményeknek ezért 4 koordinátája van az \mathbf{r} helyére a **négyesvektor** lép:

$$x = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (63)$$

A t helyén azért ct -t használunk, mert az intervallum levezetésénél láttuk, hogy a Lorentz-transzformáció a ct -t és a térkomponenseket transzformáljuk egymásba. A 3+1 dimenziós téridőben a négyesvektorok adják meg az események koordinátáit, ahogy 3 dimenzióban a helyvektor. Az intervallum invarianciája szerint a

$$s^2 = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (64)$$

kifejezés minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz. s -t a négyesvektor hosszának nevezzük. **Miért?** három dimenzióban \mathbf{r} hosszát $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ adja meg. A vektor hossza mindig ugyanannyi bármilyen koordinátarendszerben nézzük is, ahogy az intervallum is mindig állandó bármilyen inerciarendszerből nézzük a négyesvektort. Emiatt az analógia miatt hívjuk az

intervallumot a négyesvektor hosszának. A négyesvektorok transzformációját két inerciarendszer között a Lorentz-transzformáció írja le. Ennek alakja az inerciarendszerek standard elrendezése esetén:

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow x' = \begin{bmatrix} \gamma x_0 + \gamma\beta x_1 \\ \gamma\beta x_0 + \gamma x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\Theta) x_0 + \sinh(\Theta) x_1 \\ \sinh(\Theta) x_0 + \cosh(\Theta) x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Impulzus négyesvektor Vegyük az inerciarendszerek standard elrendezését. Legyen L' egy L -ben az x tengely mentén állandó sebességgel mozgó tömegponthoz rögzített inerciarendszer. Az impulzus kifejezésének meghatározásához használjuk fel, hogy egy v sebességgel mozgó tömegpontra L -ben:

- kis sebességek esetén a newtoni mechanikát kapjuk vissza,
- a mozgó ponthoz rögzített rendszerben (L') a pont sebessége 0 (tehát kicsi),
- a tömegponthoz rögzített rendszerben a pont $x = 0$ -ban helyezkedik el és az idő amit a ponthoz rögzített óra mér a sajátidő, τ .

Ezek alapján az L' -ben a sebességet úgy kapjuk, hogy t helyett τ szerint deriválunk, azonban most 3 helyett 4 komponensünk van:

$$\frac{dx}{d\tau} = \begin{bmatrix} \frac{d(ct)}{d\tau} \\ \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dy}{d\tau} \\ \frac{dz}{d\tau} \end{bmatrix} \Rightarrow p = m_0 \frac{dx}{d\tau} \quad (66)$$

ahol m_0 a test tömege. Felhasználva, hogy $\tau = t\sqrt{1 - \beta^2}$

$$p = \gamma m_0 \frac{dx}{dt} \quad (67)$$

Az így definiált impulzus térszerű koordinátái kis sebességekre megegyeznek a szokásos impulzussal. Az időszzerű komponens jelentése: relativisztikus energia. Később látni fogjuk, hogy ez szintén megegyezik a newtoni energiával kis sebességek esetén. Mivel m_0 és τ invariáns a Lorentz-transzformációra

nézve, így p továbbra is négyesvektor marad. Transzformációs szabálya, (65) alapján:

$$p = \begin{bmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Rightarrow p' = \begin{bmatrix} \gamma E/c + \gamma\beta p_x \\ \gamma\beta E/c + \gamma p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\Theta) E/c + \sinh(\Theta) p_x \\ \sinh(\Theta) E/c + \cosh(\Theta) p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (68)$$

Látható, hogy a transzformáció során az energia és az impulzus is megváltozik, ezek inerciarendszer-függő mennyiségek. Láttuk viszont, hogy a négyesvektorok hossza invariáns mennyiség. A relativisztikus impulzus hossza egy részről:

$$\begin{aligned} s^2 &= (\gamma m_0)^2 \left(c^2 \left(\frac{dt}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \\ &= (\gamma m_0)^2 c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) \\ &= m_0^2 c^2 \end{aligned} \quad (69)$$

Más részről:

$$s^2 = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 \quad (70)$$

A kettőt összehasonlítva következik, hogy:

$$\boxed{E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4} \quad (71)$$

Azaz a négyesvektor hossza és a nyugalmi tömeg m_0 invariáns és az $E^2 - p^2 c^2$ kifejezés is koordinátarendszer független.

2.5.2. Megmaradó mennyiségek

A relativitáselméletben három nagyon hasonló fogalom van amiket könnyű összekeverni:

- **Konstansok:** Ezek értéke mindig ugyanannyi soha nem változik. Pl.: fénysebesség, nyugalmi tömeg
- **Megmaradó mennyiségek:** egy adott inerciarendszerben valamilyen kölcsönhatás előtt és után is ugyanaz az értékük. Pl.: energia, impulzus

- **invariáns mennyiségek:** A Lorentz-transzformáció nem változtatja meg őket, azaz minden inerciarendszerben ugyanazok. Pl.: intervallum, négyesvektorok hossza

Relativisztikus impulzus Az impulzus minden komponense külön-külön megmaradó mennyiség. Ez azt jelenti, hogy p_x egy ütközés előtt és után is ugyanannyi, egy adott inerciarendszerben. Részecskék zárt rendszerére az impulzus komponensenként állandó egy inerciarendszerben.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \gamma m_0 \frac{dx}{dt} \\ \gamma m_0 \frac{dy}{dt} \\ \gamma m_0 \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Relativisztikus energia A relativisztikus energiát kifejezhetjük az impulzus négyesvektor 0-dik komponenséből is:

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} &= m_0 \frac{cdt}{d\tau} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{cdt}{dt} \\ &= \gamma m_0 c \\ &\Downarrow \end{aligned} \quad (73)$$

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ez a relativisztikus energia ami részecskék zárt rendszerére megmarad adott inerciarendszerben. Az energia kifejezése két érdekes tulajdonsággal rendelkezik.

- Ha a részecske áll ($\beta = 0 \Rightarrow \gamma = 1$), az energia akkor sem 0 a klasszikus esettel szemben, hanem:

$$\boxed{E = m_0 c^2} \quad (74)$$

Ami Einstein szállóigévé vált eredménye, de látható, hogy ez csak álló részecskékre igaz! Általánosan:

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad (75)$$

- Ha $\beta = 1$, akkor a képlet értelmetlenné válik ami azt jelenti, hogy semmilyen nem 0 nyugalmi tömeggel rendelkező test nem haladhat fénysebességgel.
- Fentebb említettük, hogy az energia kifejezése kis sebességek esetére megegyezik a klasszikus kifejezéssel. Ehhez sorfejtjük γ -t $\beta = 0$ körül:

$$\gamma = 1 + 0 \cdot \beta + 1 \cdot \frac{\beta^2}{2} \quad (76)$$

Ezzel az energia kis sebességekre $\beta = v/c$:

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} \quad (77)$$

Azaz majdnem megegyezik a klasszikus eredménnyel, egy konstanssal tér el csak. Ez nem okoz problémát a klasszikus számolásokban, mert az energiaszintet eltolhatjuk egy konstanssal bármikor. A relativitáselmélet eredménye az, hogy az energia nulla szintje már meghatározott.

impulzus négyesvektor

$$p = \begin{bmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (78)$$

A négyesvektor is megmaradó mennyiség : adott inerciarendszerben részecskék zárt rendszeréve nézve állandó. A négyesvektor hossza (71) alapján invariáns mennyiség hiszen két konstanssal m_0 -al és c -vel arányos. Ez a mennyiség nem csak egy adott inerciarendszerben állandó részecskék zárt rendszerére, hanem mindegyikben.

Tömegeffektus Érdekes következménye a relativitáselméletnek, hogy a tömeg maga nem megmaradó mennyiség. Egy adott zárt rendszerben a részecskékre vonatkozó négyesvektor hossza, ami arányos a nyugalmi tömeggel állandó, de az nem, hogy hogyan oszlik meg ez a tömeg a részecskék közt. Pl.: Az origóban felrobban egy m tömegű test. A robbanás előtt a négyesvektor hossza:

$$E^2 = m^2 c^4 \quad (79)$$

A robbanás után a szétrepülő darabok impulzus négyesvektorainak összege meg kell egyezzen a robbanás előttivel, azonban ezekben a sebesség már nem 0, ami az jelenti, hogy a fentebb kiszámolt energia egy része mozgási energia formájában van jelen ezért az egyes részecskékre kiszámolt nyugalmi tömegek összege nem adja ki az eredeti nyugalmi tömeget. Nézzük meg mi történik, ha két egyforma darabra robban a test és ezek egymással ellentétesen nagy sebességgel mozognak az x-tengely mentén:

$$p = p_1 + p_2 \quad \text{ahol}$$

$$p = \begin{bmatrix} E/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_1 = \begin{bmatrix} E_1/c \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} E_2/c \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Ebből megállapítható, hogy:

$$\begin{aligned} p_1 &= -p_2 = p \\ E &= E_1 + E_2 \end{aligned} \quad (81)$$

A (71) egyenlet alapján:

$$\begin{aligned} E_1^2 &= p^2 c^2 + m'^2 c^4 = E_2^2 \\ &\Downarrow \\ E^2 &= 2 \cdot p^2 c^2 + 2 \cdot m'^2 c^4 + 2 \cdot (p^2 c^2 + m'^2 c^4) \\ E^2 &= m^2 c^4 = 4(p^2 c^2 + m'^2 c^4) \end{aligned} \quad (82)$$

Látható, hogy ha beírjuk, hogy $m' = m/2$ akkor az egyenlet nem teljesül. Fejezzük ki m' -t:

$$m' = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 4\frac{p^2}{c^2}} \quad (83)$$

Azaz $m \neq m' + m'$ mert a tömegenergia egy része mozgási energiává alakult. Ezt hívjuk **tömegdefektusnak**. A fenti folyamatban nem törődtünk azzal, hogy a robbanás során valamilyen kémiai kötés energiája alakult át mozgási energiává és nem tettük bele az energiamérlegbe. A kapott eredmény ennek ellenére alkalmazható olyan folyamatokban amikor az átalakulás során nem egy energetikailag kötött rendszer alakul át. Az elemi részecskék fizikájában ilyen eset fordul elő, mikor egy M tömegű elemi részecske kisebb (m_1 és m_2) tömegű elemi részecskékre bomlik. Fontos, hogy a folyamatban résztvevő minden partner elemi, ami azt jelenti, hogy kötési energiával nem kell

számolni, hiszen az elemi részecskék nem bonthatók kisebb alkotóelemekre. Ebben az esetben a bomlási termékek mozgási energiáját az M tömegű részecske tömegének egy bizonyos hányada fedezi a maradék tömegre osztva a reakciótermékek. Ekkor a tömegdefektus:

$$\begin{aligned}\Delta m &= M - (m_1 + m_2) \\ K_1 + K_2 &= \Delta m c^2,\end{aligned}\tag{84}$$

ahol K_1 és K_2 a reakciótermékek kinetikus energiája.

Mikor egy olyan objektum bomlik el ami nem elemi, hanem több elemi részecske kötött állapota akkor figyelembe kell venni a kötési energiát is. Ha egy rendszer kötött, akkor a kötési energia és a mozgási energia összege negatív:

$$K + U < 0,\tag{85}$$

ahol feltettük, hogy mikor az alkotórészek végtelen távol vannak egymástól és már nem hatnak kölcsön akkor $U = 0$. Tekintsünk egy kötött rendszert (atom, molekula) egy olyan inerciarendszerben amiben nyugalomban van. Ekkor az energiája egyrészt a relativisztikus tömegenergia, másrészt az alkotórészek tömeg és kötési energiáinak összege:

$$E_0 = M c^2 = \sum m_i c^2 + K + U\tag{86}$$

Ahhoz, hogy a rendszert felbontsuk, be kell fektetni

$$\Delta E = -(K + U) > 0\tag{87}$$

nagyságú energiát. Mivel a kötési energia negatív azonnal látható, hogy $M < \sum m_i$, azaz a kötött állapot tömege kisebb mint az alkotórészek nyugalmi tömege:

$$M = \sum m_i - \frac{\Delta M}{c^2}\tag{88}$$

A tömegdefektus ebben az esetben:

$$\Delta m = \sum m_i - M\tag{89}$$

Látható, hogy egy kötött rendszer bomlásának esetében pont fordított a helyzet az elemi részecskék bomlásához képest. A bomló kötött rendszer tömege **kisebb** mint a termékek tömege, a bomló elemi részecske tömege pedig **nagyobb** mint a termékek tömege. A különbség magyarázata, hogy az energiamérlegbe a kötési energiát is bele kell venni. A fenti folyamat a működési

alapja az atomenergiának atomerőműveknek. A szétrepülő részecskék mozgási energiáját hasznosítjuk ezekben a folyamatokban, ami a bomló részecske tömegéből származik. A tömegenergia hatalmas, pl ha 1 g tömeget mozgási energiává alakítunk egy erőműben, akkor

$$E = mc^2 = 0.001 \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \cdot 10^{13} \text{ J} = 24,3 \cdot 10^6 \text{ kWh} \quad (90)$$

Ami egy átlagos háztartás 6000 évi fogyasztása. (kb 4000 kwh-t fogyaszt egy Európai háztartás évente). Természetesen nagyon nehéz 1 g anyagot tiszta energiává alakítani és továbbítani, ezért sokat elveszítünk a konverzió során.

2.6. Ajánlott irodalom

- Edwin F. Taylor – John Archibald Wheeler. *Téridőfizika*. 2005
- Hraskó Péter. *A relativitáselmélet alapjai*. typotex, 2009
- Albert Einstein. *A speciális és általános relativitás elmélete*. Gondolat, 1978
- Michael Tsampanlis. *Special Relativity*. Springer, 2010

3. Általános relativitás elmélet és kozmológia

3.1. Az általános relativitáselmélet alapfogalmai

Ha a speciális relativitáselmélet eredményeit gravitációs mezőben szeretnénk alkalmazni, ellentmondásba ütközünk. Az alapprobléma az, hogy a gravitációra leírására klasszikusan a Newton-féle gravitációelmélet szolgál ami távolhatáson (azaz végtelenül gyorsan terjedő kölcsönhatáson) alapul. Ez egyértelműen ellentmond a fénysebesség határsebesség jellegének, ezért nem világos hogyan lehetne a relativisztikus keretbe foglalni. Az elektromosság és a mechanika esetében nincs probléma, hiszen az elmélet az elektrodinamikát invariánsan hagyja, a Newtoni mechanika helyébe pedig a relativisztikus mechanika lépett, ami kis sebességek és energiák esetén megegyezik a klasszikus mechanikával. A fentiek miatt valahogyan be kell építeni a gravitációt a relativitáselméletbe úgy, hogy közben az eddig elért eredmények is megmaradjanak. Vizsgáljuk meg részletesen milyen problémák merülnek fel gravitációs mezőben.

Az ekvivalencia elv

A gyenge ekvivalencia elv A newtoni gravitációelméletben szereplő gravitáló tömeg sok jegyre pontosan megegyezik a Newton II. törvényében szereplő dinamikai (tehetetlen) tömeggel:

$$F_g = G \frac{m M}{r^2} \quad F = a m \quad (91)$$

A kettő egyenlőségét az Eötvös Loránd híressé vált kísérletsorozata nagy pontossággal igazolta és azóta sem vezetett egyetlenegy mérés sem ezzel ellentétes eredményre:

A testek gravitáló és tehetetlen tömege megegyezik.

Ez a tény egy mélyebb összefüggést sejtet a gravitációt illetően.

Az erős ekvivalencia elv A relativitási elv kimondja, hogy a fizikai törvények alakja az inerciarendszerekben megegyezik. Az eddig tárgyalt inercia-

rendszerek egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerek voltak. Mivel a gyorsuló rendszerek nem inerciarendszerek, először azt gondolhatnánk, hogy a gravitációs mező hatására szabadon eső (gyorsuló) rendszerek sem inerciarendszerek azonban ez nem igaz. Mitől különleges az eset amikor a gravitáció hatására gyorsul egy test? A gyenge ekvivalencia elv miatt az $F_g = F$ egyenletből az m tömeg kiesik. (Ez nem igaz pl. az elektromos erőterben való mozgásra.) A gravitáció hatására gyorsuló test minden egyes atomja ugyanolyan mértékben gyorsul ezért nem érezzük a hatalmas gyorsulást. Ezzel ellentétben, ha egy gyorsuló autóban ülünk akkor érezzük azt ahogy gyorsulunk, mert testünk üléshez érő részének kell először felgyorsulnia ami aztán erőt fejt ki a többi részünkre, hogy azok sebessége is növekedhessen. A gravitáció esetében minden részünk egyszerre gyorsul ezért nem érezzük az erőt! Az űrhajósok akik a Föld körül keringve folyamatos gravitációs gyorsulásnak vannak kitéve, ebből nem éreznek semmit, sőt az egyik legtokéletesebb inerciarendszerben vannak. A fentiek alapján így fogalmazható meg az erős ekvivalencia elv:

A gravitációs mező hatására gyorsuló koordinátarendszer inerciarendszer. A gravitációs mező hatása teljesen kitranszformálható, azaz a benne lezajló fizikai folyamatok teljesen függetlenek a gravitációs mező erősségétől.

Az elvből az is következik, hogy **fizikai** szempontból nincs különbség aközött, hogy valaki egy gyorsuló űrhajóban a gyorsulás irányával ellentétes irányú erőt érez, vagy a földön állva a súlyát.

3.1.1. Lokális inerciarendszerek

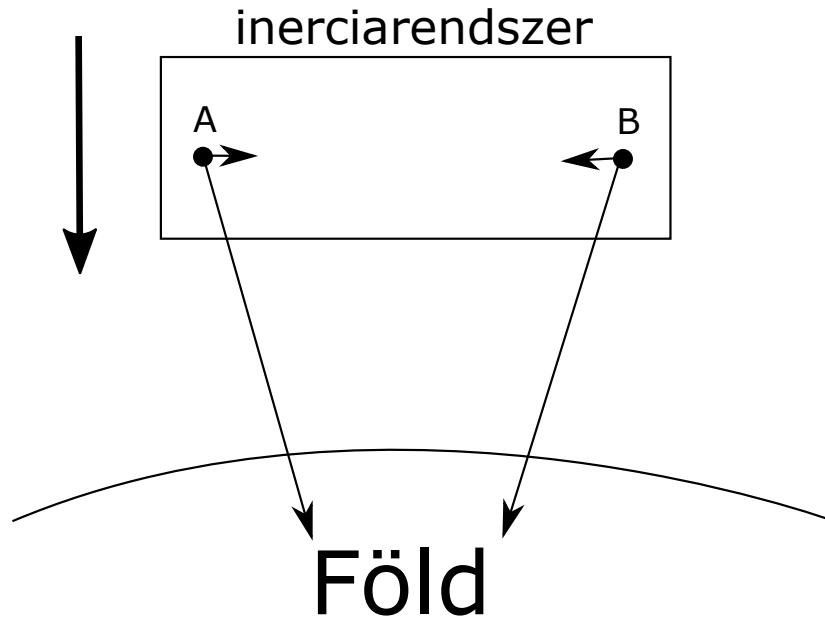
A speciális relativitáselméletben nincs kikötés az inerciarendszerek méretére, a koordinátatengelyeket tetszőleges irányba tetszőlegesen mértékben meghosszabbíthatjuk. Ez gravitációs erőterben lévő inerciarendszerekre már nem igaz (10). Vegyünk két testet amik egy Föld felé zuhanó dobozban helyezkednek el. Mivel a rájuk ható erő nem teljesen függőleges hanem a Föld középpontja felé mutat ezért a testek amellet, hogy zuhannak közelednek is egymás felé. Amíg ez az effektus elég kicsi ahhoz, hogy a mérési pontosságon belül ne észlelhessük a rendszer inerciarendszernek tekinthető. Az effektus annál kisebb, minél kisebb a testek távolsága, emiatt nem választhat-

juk az inerciarendszert tetszőlegesen nagyok. Ha ideális mérési pontosságot feltételezünk, akkor az inerciarendszer egyetlen ponttá zsugorodik össze. Ezt fizikailag úgy mondjuk, hogy az általános relativitáselméletben az inerciarendszerek **lokálisak**. A gravitációs mező minden pontjában felállíthatunk egy lokális inerciarendszert, aminek koordinátatengelyeit meghosszabbíthatjuk addig amíg a mérési pontosságon belül a kiterjed vonatkoztatási rendszer is inerciarendszer. Ezekben a lokális inerciarendszerekben a fizikai törvények alakja megegyezik, de a fizikai mennyiségek mérőszámai nem! A speciális relativitáselméletben a Lorentz-transzformáció mondta meg, hogy kell a fizikai mennyiségeket transzformálni inerciarendszerek között, itt azonban nem világos hogy mi a transzformációs szabály. A transzformációs szabálynak össze kell kapcsolnia különböző pontokat a gravitációs térben, és le kell írnia, hogyan változnak a c, t, x, y, z koordinátái az eseményeknek a különböző pontokban elhelyezkedő inerciarendszerekben.

3.1.2. Metrika

A gravitáló test körül nem csak a teret, hanem a téridőt kell leírni, ezért 3+1 dimenzióban kell gondolkodni. Ahogy három dimenzióban, úgy 3+1-ben is úgy jellemezhetjük a teret, hogy megadjuk a geometriáját (pontok távolsága, terület felület stb.). A nehézség az, hogy míg a 3 dimenziós teret el tudjuk képzelni a 4 dimenziósat nem, ezért egy olyan módszert kell használni ami dimenziótól függetlenül alkalmazható. A módszer szemléltetésére képzeljük el, hogy egy billiárd golyó felszínére szögeket verünk és a szomszédosokat összekötjük fonállal. Ha feljegyezzük, hogy a mely szögeket milyen hosszú fonál köt össze, akkor ezekből az adatokból visszaállíthatjuk a golyó adatait: sugarát területét, területét. Ezt a módszert magasabb dimenziókban is használhatjuk: megadjuk a szomszédos pontok közötti távolságokat, és hogy ez hogyan változik pontról-pontra. Több dimenzió esetén csak a szomszédos pontok száma változik. Mivel a pontoknak csak a távolságát kell megadnunk ami nem függ attól milyen koordinátarendszerben mérjük, így ez a leírás koordinátarendszer-független.

Sík téridő metrikája A speciális relativitáselméletben szereplő téridőt síknak hívjuk, mert benne a szomszédos pontok távolsága formailag hasonló a sík pontjainak távolságához. A sík két pontjának távolsága:



10. ábra. A Föld felé zuhanó rendszerben elhelyezkedő két test egymáshoz is közeledik, mert a rájuk ható erőnek van a másik test felé mutató komponense is.

$$\begin{aligned}
 d(P_1, P_2)^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \\
 \Delta x &= x_1 - x_2 \\
 \Delta y &= y_1 - y_2 \\
 \Delta z &= z_1 - z_2
 \end{aligned}
 \tag{92}$$

A speciális relativitáselméletben a téridő pontjait eseményeknek hívjuk. Az események távolsága az invariáns intervallum, mely itt már nem csak tér hanem idő koordinátákat is tartalmaz.

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)
 \tag{93}$$

Az intervallum a távolsággal analóg mennyiség. A két formula a negatív előjeltől és a plusz idődimenziótól eltekintve megegyezik, ezért hívjuk ezt a sík téridő metrikájának. Az intervallum invariáns, azaz minden inerciarendszerben ugyanaz. Ami inerciarendszerről inerciarendszerre változik az a Lorentz-transzformáció szerint az koordináták t, x, y, z értéke.

Görbült téridő A gravitációs erőterben minden pontban felállítunk egy lokális inerciarendszert, ami (lokálisan) sík téridőnek felel meg. Az intervallum továbbra is invariáns: két esemény közötti intervallum továbbra is ugyanaz minden inerciarendszerből nézve. Ami két pont között változik az az t, x, y, z koordináták értéke. Mivel az inerciarendszerek lokálisak ezért a két esemény közötti intervallum (tér és időbeli távolság) infitezimálisan kicsi (ha ennél nagyobb lenne akkor "kilógna" a lokális inerciarendszerből). Ezt úgy jelöljük, hogy a képletekben Δ helyet d -t írunk:

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (94)$$

Egy másik pontba menve a gravitációs térben ds változatlan marad, de a koordináták értékei megváltoznak. Ezt úgy jelöljük, hogy megszorozzuk őket a gravitációs tértől függő függvényekkel, g -kkel:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - (g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2) \quad (95)$$

A függvény indexei attól függnak, hogy mely koordinátákat szorozza. (a koordináták számozása $x = 1, y = 2, z = 3, t = 0$) Általános esetben keveredhetnek is a koordináták, tehát megjelenhetnek $g_{01}dt dx$ típusú tagok is. A gravitációs erő összes hatása ezekben a g függvényekben foglalható össze, és abban nyilvánul meg, hogy a tér és időkoordináták értékei pontról pontra változnak. **A gravitációs erőt tehát távolba hatás helyett azzal magyarázzuk, hogy a testek közelében a tér "meggömbül" azaz a testek alakjától, energiájától függően a tér és idő koordináták pontról pontra változnak. A gravitációt ez teljesen leírja, ezen kívül más hatása nincs.**

Ezt jelenti az, hogy az erős ekvivalencia elvben az állítottuk, hogy a gravitációs mező hatása kitranszformálható: visszavezethető relativisztikus effektusokra, a lokális tér és az idő koordináták megváltozására.

A g függvényeket összefoglalva metrikának nevezzük. Meghatározásuk nehéz feladat, mert függenek az anyag geometriai elrendezésétől, energiájától, nyomásától, perdületétől. A pontos összefüggést az Einstein-egyenlet

írja le, mely egy bonyolult nem lineáris egyenlet rendszer, és általánosságban csak numerikusan oldható meg. A továbbiakban az Einstein egyenlet megoldásával nem foglalkozunk, csak a már kiszámolt metrika következményeit vizsgáljuk meg.

a

3.2. Schwarzschild-metrika és következményei

3.2.1. A metrika alakja

A Schwarzschild-metrika az Einstein-egyenletek megoldása, gömbszimmetrikus, időfüggetlen esetben. Eredményesen használható a gravitációs tér leírására bolygók csillagok, fekete lyukak körül. Az Einstein-egyenletek ezen megoldása áll legközelebb ahhoz a gravitációról kialakult intuitív képhez amit a Newton-féle gravitáció alapján várunk. **Nem tartalmazza a forgása miatt bekövetkező relativisztikus effektusokat**, de kis szögsebességek esetén ezek elhanyagolhatóak. Mielőtt a konkrét matematikai alakját megadnánk, ami fentebb említett g -k megadását jelenti, gondoljuk végig, hogy milyen következményei vannak annak, hogy gömbszimmetrikus esetben szeretnénk az ívelemnégyzetet megadni. Fentebb láttuk, hogy sík téridőben az intervallum:

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (96)$$

Itt 4 koordinátatengely van t, x, y, z . Az az intervallum ebben a koordináta-rendszerben felírt infitezimális távolságnak, ívelemnek felel meg. **Megjegyzés:** 3D-s térben a tengelyek x, y, z . A távolság $l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. (Pitagorasz-tétel) Ha nagyon kicsi a távolság: $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

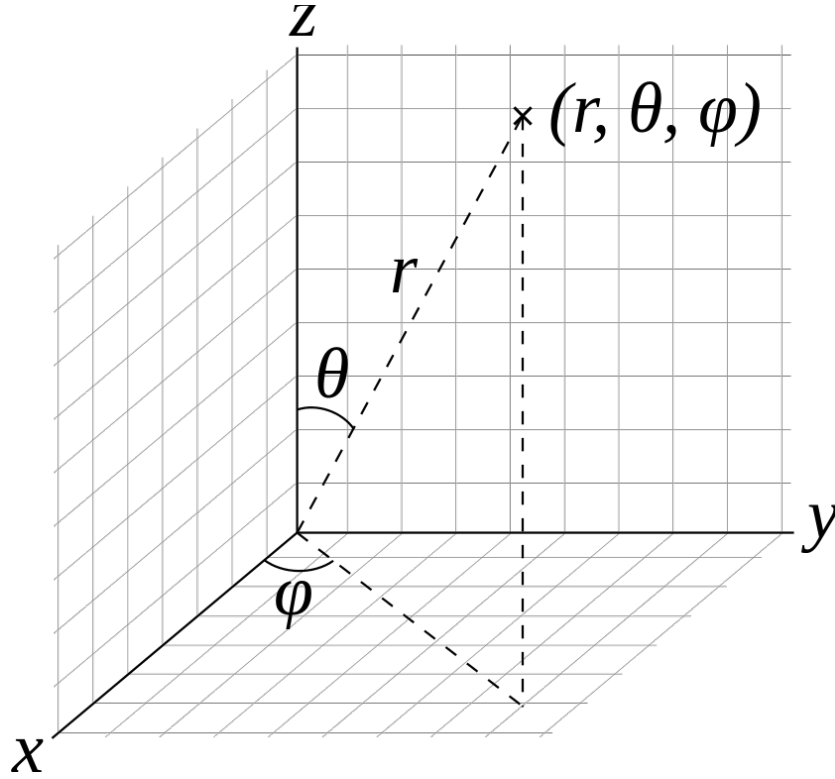
Négy dimenzióban nem igaz a pitagorasz-tétel ezért a távolságot ott az intervallum adja meg, amit így foglalhatunk össze:

$$intervallum^2 = időkülönbség^2 - 3Ds\ távolságkülönbség^2 \quad (97)$$

Ha gömbszimmetrikus esetben dolgozunk, akkor polárkoordináta-rendszerben kell megadnunk az infitezimális távolságot. Ekkor a térbeli koordinátatengelyek r, θ, φ . (11 ábra) Az infitezimális távolság:

$$dl^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2 \quad (98)$$

Az egyes tagok előtt g függvények lehetnek amik a hossz változását írják le a relativisztikus effektusok miatt. Mivel egy gömbszimmetrikus téridőt



11. ábra. Gömbi koordináta rendszer 3 dimenzióban

szeretnénk leírni, azaz az $r = 0$ -ban lévő középpont körül bámerre forgatva a rendszert semmi nem változik a metrika nem változhat, ha θ vagy φ változik. Ez azt jelenti, hogy g -k csak t -től és r -től függhetnek. Azt is tudjuk, hogy a végeredménynek, ds -nek minden θ -ra és φ -re ugyanannak kell lennie. Ilyen gömbszimmetrikus esetet csak úgy kapunk ha a metrika alakja:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 - g_{rr}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (99)$$

Az Einstein egyenletek adják g_{tt} -t és g_{rr} -t:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= 1 - \frac{2M}{r} \\ g_{rr} &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, \end{aligned} \quad (100)$$

ahol M a tömegközéppontban lévő test tömege. Tehát a **Schwarzschild**-

metrika:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (101)$$

Tanulságok

- A relativisztikus effektusok a t és r koordinátákat érintik, a szögeket tartalmazó tagok ugyanazok mint 3D-ben és azt jelentik, hogy bármilyen irányból és közelítünk az origóban lévő M tömegű gömbhöz mindig ugyanazt tapasztaljuk.
- Ha $r \rightarrow \infty$, akkor $\frac{2M}{r} \rightarrow 0$, és a metrika :

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (102)$$

Ami sík téridőnek felel meg csak polárkoordinátákban. Eszerint a középpontól nagy távolságra a téridő síknak tekinthető, azaz olyan mint amit a speciális relativitáselméletben tárgyaltunk.

- A fenti érvelésből az is látható, hogy a metrika képletében t és r a távoli megfigyelő által mért koordináták.
- $M = 0$ esetben a metrika a sík (gravitáció nélküli) téridő metrikája lesz. Ez szemléletesen mutatja, hogy a tér görbültségét a tömeg okozza.
- $r = 2M = R$ esetben a fenti kifejezés értelmetlenné válik. Ezt a sugarat **Schwarzschild-sugárnak** nevezzük. Ha a vizsgált gravitáló objektum valós sugara nem nagyobb mint ez az érték akkor az ezzel a sugárral jellemzett gömbhéjat **eseményhorizontnak** nevezzük. Az eseményhorizonton belülről semmilyen jel, vagy test nem érheti el a külső világot, ezért az ilyen objektumokat **fekete lyukaknak** szokták nevezni. (Befelé probléma nélkül haladhatnak az objektumok és jelek.)

A Schwarzschild-sugár (R_{Sc}) nagyon hasznos eszköz arra, hogy megítéljük mennyire viselkedik egy objektum relativisztikusan. Ha $R_{Sc} = 2M \ll r_o$ ahol r_o a vizsgált objektum sugara, akkor a (104) képletben lévő $\left(1 - \frac{2M}{r_o}\right)$ tényező értéke nagyon közel van 1-hez, ezért a téridő jó közelítéssel sík. Ekkor a Gravitáció Newton-féle elmélete nagyon jó közelítés, és a rendszer a klasszikus fizikai intuíciónknak megfelelően működik. Ha $R_{Sc} = 2M \approx r_o$

Akkor a $\left(1 - \frac{2M}{r_o}\right)$ tényező nagyon különbözik 1-től, és a téridő görbülsége számottevő. Ekkor jelentős relativisztikus effektusok jelentkeznek a sík téridőhöz képest. A $R_{Sc} = r_o$ esetben a vizsgált égitest egy fekete lyuk és R_{Sc} az eseményhorizontjának sugara.

Megjegyzés: A metrika képlete a $c = 1, G = 1$ egységrendszerben van, tehát ha ki akarjuk számolni függvénytáblából a Schwarzschild-sugarat, akkor minden mértékegységet át kell váltanunk SI-be. Ekkor

$$R_{Sc} = \frac{2GM}{c^2}, \quad (103)$$

ahol c a fénysebesség és G a gravitációs állandó. A Schwarzschild-metrika tehát SI-ben:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (104)$$

A $G = 1, c = 1$ egységrendszer előnye, hogy nem kell nagyságrendileg különböző számokkal dolgozni. Az átváltás SI-ből ebbe a rendszerbe nagyon könnyű, ha minden távolságot km-ben mérünk, mert ekkor a tömegeket elég naptömegben mérni:

$$M_{Sun} = 1.475 \text{ km} \quad (105)$$

Ez is mutatja, hogy nagyon nagy tömegeket kel beírni a képletbe, hogy annak gravitációs hatása érvényesüljön.

Nevezetes égitestekre kiszámolt Schwarzschild-sugár hányadokat találhatunk a 3.2.1 táblázatban. Minél nagyobb az arány annál relativisztikusabban viselkedik a téridő az objektum körül. Látható, hogy a Föld körül ahol a Newtoni gravitáció jól működik ez az érték 10^{-12} míg fekete lyukakra 1.

Égitest	<i>Schwarzschild-sugár</i> <i>sugár</i>
Föld	10^{-12}
Nap	10^{-6}
neutroncsillag	0.3 – 0.6
Fekete lyuk	1

3.2.2. Fizikai következmények

Megfigyelők A speciális relativitáselméletben a különböző inerciarendszerek az egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó koordinátarendszerek. Az általános relativitáselméletben az inerciarendszerek lokálisak és minden pontban felvehetünk egyet. A Schwarzschild metrika vizsgálata során 2 speciális inerciarendszert veszünk fel:

- **Távoli megfigyelő:** Az $r = 0$ ponttól azaz gravitáló tömegtől végtelen messze elhelyezkedő megfigyelő. Itt a téridő síknak tekinthető, ahogy azt fentebb láttuk. A Schwarzschild-metrikában szereplő t, r, θ, φ koordináták ennek a sík téridőnek a koordinátái.
- **Héj megfigyelő:** A központi gravitáló tömeg körül egy adott r sugarú gömbhéjon elhelyezkedő megfigyelő. Itt a téridő már nem tekinthető síknak és a gravitációs hatásokat a metrikából tudjuk leolvasni.

Ez a két megfigyelő hasznos, hogy összehasonlíthassuk, a sík téridő és a gravitáció által meggörbített téridő szerkezetét.

A téridő görbültsége Fentebb említettük, hogy minden inerciarendszer lokális és kitranszformálható belőle a gravitáció hatása az ekvivalencia elv szerint. Ez konkrétan azt jelenti, hogy minden inerciarendszer **lokálisan sík**. A héj megfigyelő azonban nem inerciarendszerben van hanem gyorsul, hiszen mesterségesen változatlan távolságra van tartva az origótól. Ha inerciarendszer lenne, akkor szabadon esne az origó felé, és nem érezné a gravitáció hatását, az teljesen kitranszformálható lenne. Ezzel szemben érzi például a saját súlyát, ahogy mi is a Föld felszínén hiszen mi is héj megfigyelők vagyunk. A héj-megfigyelő mégis fontos pont amiatt, hogy az égitestek felszínén elhelyezkedő megfigyelők mind héj-megfigyelők, ezért gyakran fordulnak elő a fizikában.

A héj megfigyelő által mért koordinátákat a következőképpen számolhatjuk ki.

- **Sugár:** a héj megfigyelő sugár irányban elhelyez egy méterrudat melynek két végén szinkronban egy-egy lámpa villog. Számoljuk ki a Schwarzschild-metrikában a villogások, mint események közötti intervallumot. Ekkor $d\theta = 0, d\varphi = 0, dt = 0$:

$$d\sigma = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \quad (106)$$

σ a héj-megfigyelő "saját-sugara", azaz az ő által lokálisan megmért megtapasztalt és távolság.

- **idő:** A héj megfigyelő adott sugárnál elhelyez egy villogó lámpát. A villogások közötti intervallum, megadható, figyelembe véve, hogy $d\Theta = 0, d\varphi = 0, dr = 0$:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (107)$$

$d\tau$ a héj megfigyelő által mért "sajátidő", amit megtapasztal.

A fentieket behelyettesítve a metrikába a héj megfigyelő sík téridejét kapjuk. Fontos, hogy a héj megfigyelő nem inerciális, azaz az ő térideje nem kell, hogy sík legyen az ekvivalencia elv miatt, fizikailag nem fogja ugyanazt tapasztalni mint egy szabadon eső inerciális megfigyelő. Már részről formailag tekintheti téridejét síknak, (ezt jelképezi a fenti helyettesítés), de ezt fogja tapasztalni, hogy a formailag sík téridőt jellemző koordinátákkal leírt fizika nem egyezik meg más inerciarendszerekben mért fizikával. Pl.: Egy szabadon eső lift inerciarendszer, és benne a testek szabadon lebegnek ha elengedjük őket. Ez az inerciarendszer teljesen jogosan használja a sík téridő metrikáját mindig jó eredményt fog kapni. A Föld felszínén álló megfigyelő héj megfigyelő, és magához rögzített koordinátákat használ, sík téridőt feltételezve. Azonnal nyilvánvaló, hogy feltételezése helytelen: ha elenged egy labdát az rögtön leesik, és nem marad ott lebegve ahol eleresztette, mint minden inerciarendszerben történne. Miért használ egy nem inerciális megfigyelő lokálisan sík koordinátákat? Azért mert ez az egyetlen mód, ahogy méréseket tud végrehajtani. Távolságot úgy mér pl, hogy fényjelet bocsájt a mérendő távolságban elhelyezett tükörrre, és megméri mennyi idő alatt ér vissza. Az így kiszámolt távolságot saját (torzult) idejét használta fel. Azt a kifejezés tehát, hogy "téridejét lokálisan síknak tekinti" annyit jelent, hogy a fizikai mennyiségek elfogadott mérési utasításait használja (amiket inerciarendszerekben definiáltunk). Ez alapján szinkronizálja óráit, állítja be méterrúdjaikat, amik torzultak lesznek így más fizikát fog mérni, mint egy inerciarendszerben mérnének.

A fenti összefüggések megmutatják, hogy a távoli megfigyelő és az r -sugarú gömbhéjon lévő megfigyelő által mért sugár és idő adatok milyen kapcsolatban vannak egymással:

- **Idődilatáció:** Ha $r > 2M$ azaz a Schwarzschild-sugár (minden gyakorlati esetben ez a helyzet), akkor $d\tau < dt$. Minél kisebb r annál

jobban különbözik a távoli megfigyelő és a héj megfigyelő ideje. **Minél erősebb gravitációs mezőben helyezkedik el az inerciarendszer annál lassabban telik benne az idő egy távoli gravitáció-mentes térben elhelyezkedő megfigyelő idejéhez képest.**

- **Görbült tér:** Vegyünk két eseményt melyek egymástól $d\sigma$ távolságra történnek sugár irányban. A fenti kifejezés alapján $d\sigma > dr$ azaz a távoli megfigyelő által mért sugárkülönbség kisebb, mint a héj megfigyelő által mért. Ezt szokták úgy kifejezni, hogy a tér **megnyúlik** az erős gravitációs térben.

A tér megnyúlása szemléletesen a következőt jelenti: Vegyünk egy megfigyelőt mely egy r sugarú gömbhéjon helyezkedik el. A gömbhéj belsejében egy r -nél kisebb sugarú gömbhéj helyezkedik el. A kisebb és a nagyobb gömbhéj sugarának különbségét két féle képpen lehet meghatározni:

1. A héjon lévő megfigyelő leereszt egy mérőszalagot amivel meghatározza milyen messze van tőle a másik gömbhéj. Az így mért értéket neveztük $d\sigma$ -nak.
2. A másik módszer az, hogy végighaladunk a gömbéj felszínén és megmérjük a területét. Ebből a $K = 2r\pi$ képlet alapján kiszámoljuk a sugarat, amit redukált sugárnak nevezünk. A külső és a belső gömbhájra számolt redukált sugarak különbsége dr , ez az amit a távoli megfigyelő mér.

A tér görbültsége miatt a redukált sugárból számított sugárkülönbség nem egyezik meg a héjmegfigyelő által közvetlenül megmért sugárkülönbséggel. A héjmegfigyelők a sugarat nagyobbak mérik, mint ami a kerületből következne. A helyzet ahhoz hasonló mintha gumiból kivágnánk egy r sugarú kört, ezt látja a távoli megfigyelő, aztán ujjunk közé csípnénk a gumi körlap közepét és megnyújtjuk lefelé. Ekkor a gumilapon mérőszalaggal megmért sugár nagyobbak adódik mint r , mert a gumilap megnyúlt. Mi ennek az analógiának a fizikai magyarázata?

A héj megfigyelő lokális, hiszen az inerciarendszerek lokálisak ezért számára nem közvetlenül hozzáférhető adat a gömbhéj területét, így nem detektálja a fenti különbséget. A redukált sugár azért a távoli megfigyelő által mért sugár mert a metrikát úgy állítottuk fel, hogy minden a távoli megfigyelő által mért koordináták függvényében van kifejezve. Ez annak felel meg, mintha gondolatban meghosszabbítanánk a távoli megfigyelő koordinátatengelyeit,

azaz nem lokális hanem globális koordinátarendszerként kezelnénk. Ebben a rendszerben van értelme a gömbháj területéről beszélni, mert annak minden pontja az inerciarendszerben helyezkedik el. Az ár amit ezért fizetünk az, hogy a mért értékek nem egyeznek meg a lokális inerciarendszerekben mért értékekkel és ez a különbség pontról-pontra változik. Ezt a különbséget határozza meg a metrika. A távoli megfigyelő azért is személetes, mert a naiv klasszikus világképen alapuló megfigyelő általánosítása. Ha azt feltételezzük, hogy az inerciarendszerünk koordinátatengelyeit (beleértve az időtengelyt is) végtelenül meghosszabbíthatjuk, akkor a nagy tömeggel rendelkező objektumok körül eltéréseket tapasztalunk az objektumok közelében felállított (és kalibrált) inerciarendszerekhez képest, nevezetesen az idő másképp telik, a tér pedig görbült, ahogy fentebb megállapítottuk.

Beágyazott diagram A tér görbülségét szemléltetésére azt a módszert szokták használni, hogy a 4 dimenziós téridőnek egy adott időponthoz tartozó szeletét vesszük, ami így egy három dimenziós objektum, így három dimenzióban geometriai alakzatként szemléltethető. Az ilyen diagramok esetében nem szabad elfelejteni, hogy pillanatfelvételek, egy adott koordinátarendszer szempontjából véve. A Schwarzschild-metrika esetében vizsgáljuk meg a beágyazott diagramot. Vegyünk $t = t_0$ pillanatot, ekkor az idő állandó, tehát $dt = 0$. Ami a metrikából marad:

$$ds^2 = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (108)$$

Ennek a kifejezésnek még mindig sok változója van ahhoz, hogy könnyen ábrázolható legyen. Vegyük a gravitáló gömb körül az egyenlítő metsző síkot és vizsgálódjunk-e mentén. Ekkor $\theta = 90$ és $d\theta = 0$. A metrika itt:

$$ds^2 = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\varphi^2 \quad (109)$$

Ennek a kifejezésnek csak két változója van ezért könnyen ábrázolható három dimenzióban. A kifejezés forgásszimmetrikus, mert φ minden értékére ugyanazt az eredményt adja, így egy forgásszimmetrikus alakzatot ír le. Hogy megtudjuk mi ez az alakzat, vegyük a kifejezés értékét egy adott $\varphi = \varphi_0$ helyen. Ekkor:

$$-d\sigma^2 = ds^2 = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 \quad (110)$$

Minden r pontban ki tudjuk számolni, hogy mekkora a dr -hez tartozó $d\sigma$. Mivel $d\sigma$ nagyobb mint dr ezért, hogy síkban ábrázolni tudjuk el kell forgatnunk a szakaszt, hogy felférjen az ábrára. Az elforgatást a harmadik dimenzió irányában végezzük úgy, hogy a síkra eső vetülete dr maradjon. Az eredményt a 12 ábra mutatja. Ezt mondjuk úgy, hogy a tér görbült. Az itt leírtakat nem szabad szó szerint venni, nincsen plusz dimenzió ahova a tér be tud görbülni, hogy hosszabb lehessen. (Egy jó analógia lehet, ha azt képzeljük, hogy a tér a gravitáló gömb felé haladva "sűrűbb", több "m" fér el benne, ezért nagyobbak a távolságok.)

Gravitációs vöröseltolódás Egy fényjelet indítunk az r_1 sugarú héjmegfigyelőtől sugár irányban kifelé egy $r_2 > r_1$ megfigyelőhöz. A fényjel frekvenciája (és energiája) csökken ahogy felfelé halad a gravitációs térben, ezért az r_2 -ben ülő megfigyelő kisebb frekvenciájú fényt detektál, mint az r_1 -ben lévő megfigyelő. Mivel a vörös fény frekvenciája a legkisebb a látható fény tartományában ezért a jelenséget vöröseltolódásnak nevezzük. Fordítva: ha r_2 -ből indítunk fényjelet lefelé, akkor a gravitáló testhez közelebb lévő megfigyelő nagyobb frekvenciájú fényt detektál. Ezt **kékeltolódásnak** nevezzük, mert a látható fény tartományában a kék fénynek van a legnagyobb frekvenciája.

A jelenséget a Schwarzschild-metrikánál tanult idődilatációval érthetjük meg. A fényjel frekvenciája legyen ν_1 az r_1 pontban.

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} \quad (111)$$

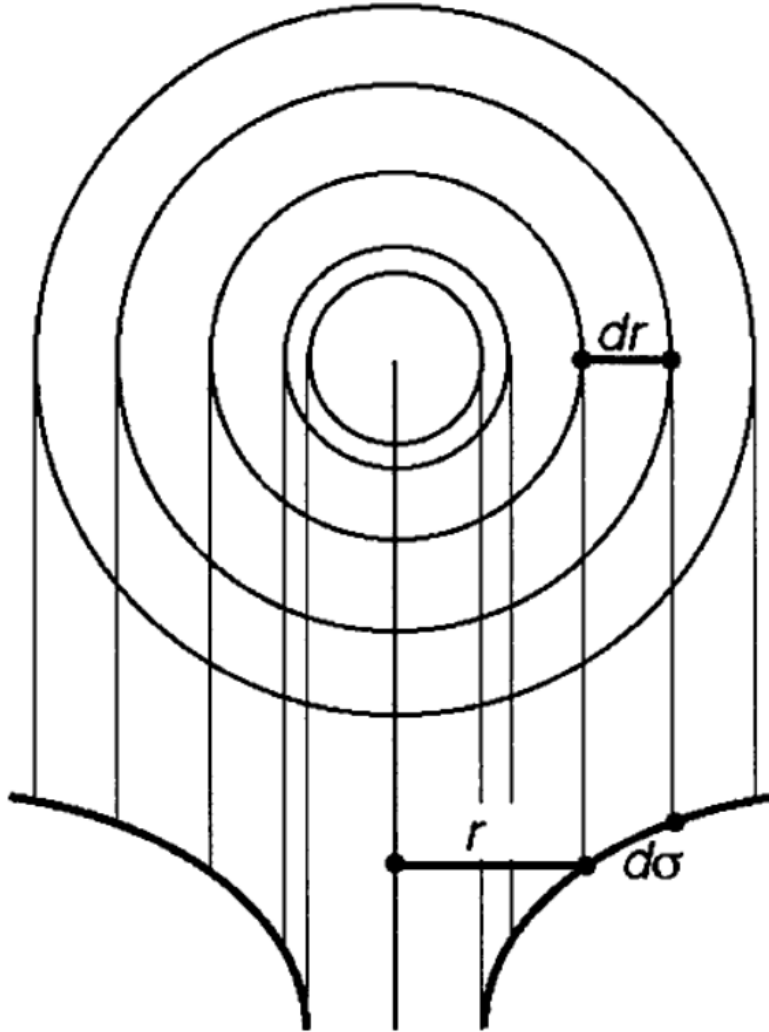
ahol T_1 a fény periódusideje. Ez az időtartam az r_1 héjmegfigyelő koordinátarendszerében mért időtartam. A távoli megfigyelő által mért idő T , ezzel az alábbi kapcsolatban van:

$$T_1 = T \sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}} \quad (112)$$

Az r_2 héjon lévő megfigyelő ideje ezzel az alábbi kapcsolatban van:

$$T_2 = T \sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}} \quad (113)$$

A fenti két egyenletet elosztva egymással és felhasználva, hogy $\nu = 1/T$:



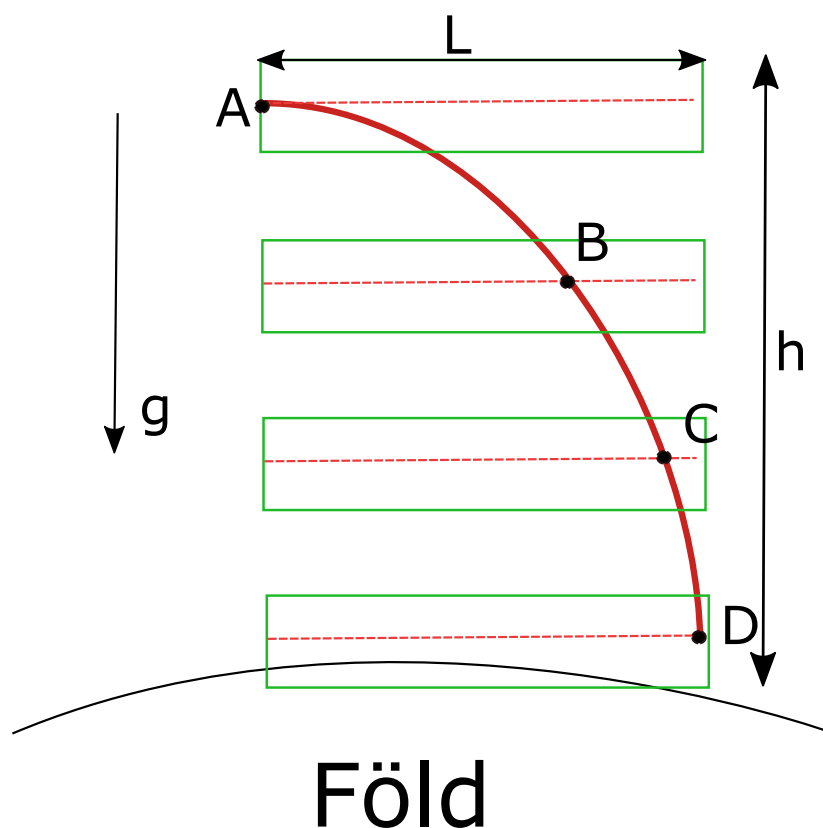
12. ábra. A tér görbületet a gravitáló test körül. A távoli megfigyelő által mért dr távolsághoz képest a helyi megfigyelő $d\sigma$ -t mér. Ezt úgy ábrázoljuk, hogy a kivastagított görbe hossza $d\sigma$ aminek a síkra eső vetülete dr . Tehát a kivastagított görbe a síkból "kilóg" a harmadik dimenzió mentén. Az ábrán lévő körök a távoli megfigyelő által meghatározott adott sugarú gömbhéjak és az egyenlítői sík metszésvonalai.

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}} \quad (114)$$

A képletből látszik, hogy ha $r_2 > r_1$ akkor $\nu_2 < \nu_1$. Gyakori eset, hogy nagyon messziről figyelünk meg egy nagy tömegű objektumról kiinduló fényjelet. Ekkor a távoli megfigyelő által mért frekvenciát mérjük. Ezt az eredményt megkaphatjuk, hogy ha $r_2 \rightarrow \infty$ -t behelyettesítjük a képletbe. Ami marad:

$$\nu_\infty = \nu \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (115)$$

Ez az eset fordul elő, ha egy nagy tömegű csillag felszínéről induló fényt figyeljük meg a Földről.



13. ábra. A fényelhajlás oka gravitációs térben. A zuhanó szoba inerciarendszer az ekvivalencia elv miatt, tehát benne a fény egyes vonalban terjed benne.

Fényelhajlás gravitációs térben A fénynek nincs tömege ezért a klasszikus szemlélet szerint a gravitáció nincs rá hatással. Ezzel szemben az általános relativitáselméletben nem gravitációs kölcsönhatás van, hanem a tér és az idő görbül meg a tömeg és az energia hatására. A tér görbültségének köszönhetően a fény egyenes útja is görbült lesz, tehát a fényre hatással van a gravitáció. A jelenséget a 13 ábra magyarázza.

Vegyünk egy inerciarendszert mely szabadon mozog gravitációs térben. Fentebb említettük, hogy az ilyen inerciarendszerek mindig lokálisak, azaz ideális esetben pontszerűek. A valóságban a rendszer kiterjedt lehet, amíg mérésekkel kimutathatatlan a gravitációs mező hatása. Ez a hatás abban nyilvánul meg, hogy a kiterjedt rendszert különböző pontjaiban a gravitáció kicsit más irányban hat, annak köszönhetően, hogy a két pont máshol helyezkedik el, a Földhöz képest. Amíg a rendszer kicsi, addig ez a különbség is kicsi. A Földhöz közel úgy vehetjük, hogy a rendszer egésze függőlegesen lefelé gyorsul g gravitációs gyorsulással. Ekkor az ekvivalencia elv alapján a rendszerben ülő megfigyelő nem tapasztalhat mást mint egy nyugalomban lévő rendszerben lévő megfigyelő.

Ebben az inerciarendszerben a zuhanó szoba egyik oldalára merőlegesen egy lézerrel világítunk a padlóval párhuzamosan. Mivel a rendszer inerciarendszer az eredmény nem különbözhet attól amit álló rendszerben kapnánk, azaz, hogy a lézer a szoba szemközti falára világít és a fény egyenes vonalban terjed a padlóval párhuzamosan. (piros szaggatott vonal az ábrán) Ha ezt a jelenséget a Földhöz rögzített koordinátarendszerből nézzük akkor azt látjuk, hogy a fény nem egyenes utat jár be hiszen az A pontból induló fénysugár a B és C pontokon keresztülhaladva a D pontban fejezi be az útját. Mivel a szoba szabadon esik ezek a pontok nem esnek egy egyenesbe a Földhöz rögzített koordinátarendszerben. (13)

A Földhöz rögzített koordinátarendszerben a fény ferde utat jár be, mert a zuhanó rendszerben egyenes úton kell, hogy haladon az ekvivalenciaelv miatt. Az A pontból indul és

$$\Delta t = \frac{L}{c} \quad (116)$$

idő alatt, amíg a szoba másik falához ér, a szoba

$$h = \frac{1}{2}g\Delta t^2 = \frac{gL^2}{2c^2} \quad (117)$$

távolságot esik, így a fény is.

A fenti érvelésnek van még egy érdekes következménye. A Földhöz rögzített koordinátarendszer nem inerciarendszer! Ez jól látható, hiszen a fény sem terjed egyenes vonalban benne és a gravitáció hatását is érezzük, ezért van súlyunk. Ha inerciarendszer lenne akkor pontosan ugyanúgy mozogna mint a zuhanó szoba és nem éreznénk a gravitáció hatását. Arról van szó, hogy a Földet alkotó részecskék közötti kölcsönhatások megakadályozzák őket abban, hogy az inerciarendszerekre jellemző szabad mozgást végezzék. Azért nem zuhanunk a Föld középpontja felé, mert a talaj alattunk ezt megakadályozza, így viszont nem vagyunk többé inerciarendszerben. Az általunk érzett "gravitációs erő" annak a következménye, hogy a Földön nem inerciarendszerben vagyunk, és a Földet alkotó részecskéknek folyton erővel kell hatni ránk, hogy eltérítsenek az erőmentes, szabad, inerciarendszereknek megfelelő mozgástól, ami a zuhanás lenne. Erőmentes környezetben, például egy űrállomáson, ahol semmi sem akadályozza ezt a mozgást, az űrhajósok ténylegesen inerciarendszerben vannak, és nincs súlyuk.

A fényelhajlás következménye, hogy a nagy tömegű objektumok, csillagok, galaxisok, eltérítik a fény útját, így a csillagok képe torzítva jelenik meg. A nap miatt bekövetkező fényelhajlás a napkoronghoz közeli csillagok esetében a legerőteljesebb így napfogyatkozásakor figyelhető meg. A fényelhajlás miatt a csillagok pozíciója látszólag eltolódik a Nap nélküli esethez képest.

Nagyon nagy tömegű objektumok, például galaxisok, fekete lyukak, olyan mértékben hajlítják meg a teret, hogy a fény számára egy hatalmas lencséhez hasonlóan viselkednek, és a mögöttük lévő objektumok képe torzítva érkezik el hozzánk. Ezt hívják gravitációs lencsézésnek.

3.3. Gravitációs hullámok

Az Einstein-egyenletek egy speciális megoldása, egy a térben és időben periodikusan tovább terjedő periodikus változást ír le, ezt nevezzük gravitációs hullámnak. A gravitációs hullám abban hasonlít a hétköznapi életben előforduló hullámokra (hang, fény, víz), hogy általa egy periodikus változás térben továbbterjed. Ami periodikusan változik az a téridő szerkezete, a metrika. A sík és a Schwarzschild téridő esetében a metrika időben állandó volt, ezért úgy gondolhattunk rá, mint egy adott háttérre amin az események történnek. Ez a gravitációs hullámok esetében már nem igaz, itt a metrika időben is változik, aminek az a következménye, hogy a tér görbültségének mértéke időben nem állandó.

3.3.1. Metrika gravitációs hullámokra

A gravitációs hullámok tehát megváltoztatják a téridő görbületét. Ezt úgy írhatjuk le, hogy a sík téridő metrikája módosul a hullámok hatására. Fentebb láttuk, hogy a metrikát a $g_{ij}di dj$ tagok határozzák meg, ahol $i = t, x, y, z$ és $j = t, x, y, z$. Sík téridő esetén $g_{tt} = 1$ $g_{xx} = -1$ $g_{yy} = -1$ $g_{zz} = -1$, ezért

$$\Delta s^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (118)$$

Ez a metrika módosul egy kicsi, de időfüggő értékkel, amit így írhatunk fel:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}, \quad (119)$$

ahol η_{ij} a sík téridő metrikáját jelenti. A h_{ij} függvények pontos alakját az Einstein-egyenletek adják. Ezek meghatározása után a metrika alakja gravitációs hullámokra SI egységekben:

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 \\ - [1 + h_+ \cos(\omega(t - z/c))] dx^2 \\ - [1 - h_+ \cos(\omega(t - z/c))] dy^2 \\ - 2h_\times \cos(\omega(t - z/c)) dx dy \end{aligned} \quad (120)$$

A fenti formulában szereplő t, x, y, z koordináták egy "**szabad koordinátarendszerben**" vannak, melynek z -tengelye egybe esik a gravitációs hullám haladási irányával. Ezt a szabad rendszert úgy képzelhetjük el, mint súlytalanságban lebegő kavicsokhoz rögzített a koordináta tengelyeket. A rendszer szabad, mert minden kavics szabadon esik és semmi nem akadályozza őket a mozgásukban. Mikor a gravitáció hullám megérkezik, akkor szabadon elmozdíthatja ezeket a kavicsokat mivel azonban a koordinátatengelyek ezekhez vannak rögzítve ezt a szabad rendszerben lévő megfigyelő nem detektálja. A gravitációs hullám hatása másban nyilvánul meg melyre majd később visszatérünk.

A metrika tulajdonságai

- g_{tt} és g_{zz} nem változott a sík téridőhöz képest. A gravitációs hullám hatása a terjedési irányára **merőleges**, az $x - y$ síkban érvényesül.
- a Gravitációs hullám fénysebességgel terjed. $\cos(\omega(t - z/c))$ egy z irányban c sebességgel mozgó hullámot ír le.

- g_{xx} és g_{yy} megváltozott a sík téridőhöz képest. Konkrétan:

$$\begin{aligned} h_{xx} &= h_+ \cos(\omega(t - z/c)) \\ h_{yy} &= -h_+ \cos(\omega(t - z/c)) \end{aligned} \quad (121)$$

Ez a változás időben periodikus, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ alapján számolható periódusidővel. A változás a z -tengely mentén mérve is periodikus (ezért hullám) és c sebességgel halad a z irányban. Az x és az y tengely mentén történő periodikus változások egymással **ellentétes** irányúak: mikor h_+ nő az y irányban csökken az x irányban.

- Egy teljesen új tag g_{xy} is megjelent a sík téridőhöz képest, ami szintén periodikus változást ír le az $x - y$ síkon, de nem ugyanazzal az amplitúdóval mint a csak x ill. csak y irányban ható tagok. Ez a tag egy olyan oszcillációt ír le amiben az x és y irányú kitérés egymással azonos.
- **Polarizáció** A gravitációs hullám tehát transzverzális (hatása a terjedési irányára merőleges síkban érvényesül) és két polarizációja van h_+ és h_\times , azaz a terjedési irányára merőleges síkban két féle módon tud rezegni.

A gravitációs hullámok hatása Már bevezettük a sajátidő fogalmát ami a mozgó (lokális) megfigyelőhöz rögzített órán mért idő. A **sajáttávolság** a mozgó (lokális) megfigyelőhöz rögzített méterrúddal meghatározott távolság. Vegyük a koordináta-rendszerek standard elrendezését. Az L' (mozgó) rendszerben elhelyezett méterrúd két végét jelentő események, E és V . Számoljuk ki az ezekre vonatkozó intervallumot:

$$\begin{aligned} \Delta s_{EV}^2 &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 0 - \Delta x'^2 \quad L'\text{-ben} \\ \Delta s_{EV}^2 &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \quad L\text{-ben} \\ \Delta \sigma^2 &= -\Delta s_{EV}^2 = \Delta x^2 = \Delta x'^2 - c^2 \Delta t^2 \\ \Delta \sigma &= \Delta x' = \sqrt{\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2} \end{aligned} \quad (122)$$

Tehát mivel a méterrúd két végét jelentő esemény már nem egyidejű a bármely más vonatkoztatási rendszerben csak az együtt mozgóban, ezért a sajátávolság kiszámításban nem csak a hossz hanem az eltelt idő is szerepel, ennek oka az egyidejűség relativitása. A sajátávolság az intervallum egy speciális esete azért ugyanúgy Lorentz invariáns, minden inerciarendszerben ugyanannyi.

Hogy megtudjuk a gravitációs hullámok hatását számoljuk ki a sajáttávolságot az x-tengely mentén elhelyezett két pontra. Ehhez a következő két esemény különbségét kell venni:

$$A = \begin{bmatrix} t \\ x_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} t \\ x_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (123)$$

Ebből látható, hogy $dt = 0$ és $dx = x_B - x_A$ valamint $dy = 0$, $dz = 0$. Ezeket behelyettesítve a 120 metrikába az eredmény:

$$d\sigma = (x_B - x_A) \sqrt{1 + h_+ \cos(\omega t)} \quad (124)$$

A gravitációs hullám hatása tehát az, hogy a haladási irányra merőleges síkban a pontok közötti sajáttávolság időben változik. Mivel a hullámnak két polarizációja van ez a sajáttávolság változás is kétféle módon megy végbe.

- **h_+ polarizáció** A sajáttávolság az x-tengely mentén csökken akkor az y-tengely mentén nő és fordítva. Ez két egymással ellentétes irányú rezgés az x és y tengelyen
- **h_\times polarizáció** A sajáttávolság az $x = y$ egyenes mentén nő, akkor az $x = -y$ egyenes mentén csökken. Ez abban különbözik a h_+ polarizációtól, hogy a tengelyek 90 fokkal el vannak forgatva.

Ez nem jelenti azt, hogy a pontok koordinátái változnak, ezért felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet megmérni ezt az effektust. Ha a szabad koordinátarendszert alkotó kavicsokra tükröket szerelünk és fényjelet bocsájtunk egyikről a másikra, akkor a fényjel utazási ideje a két tükör között a sajáttávolságtól függ. A fényjel a $d\sigma$ sajáttávolságot

$$d\tau = \frac{d\sigma}{c} \quad (125)$$

sajátidő alatt teszi meg. Mivel a sajátidő a sajáttávolság és a fénysebesség is inerciarendszertől független állandó így a fenti eredmény is az. (Esetleg már rendszerben másképp kell kiszámolni, de az eredmény ugyanaz.) **Mivel a sajáttávolság időben változik a fény átfutási idejéhez tartozó sajátidő is változik**, ez az az effektus amit ki lehet mérni.

3.3.2. A gravitációs hullámok detektálása

A gravitációs hullámok detektálása azon alapul, hogy a fentebb levezetett sajáttávolság időben változik. A Földön elhelyezett detektorok azonban nem a szabad inerciarendszerben vannak amiben felírtuk a metrikát, és ezért a sajáttávolság-változás másképp jelentkezik. A legfőbb különbség, hogy egy detektorban az alkatrészek nem mozognak szabadon és nem inerciarendszerben vagyunk. **A detektor alkatrészei a gravitációs hullám hatását Newtoni erőként érzékelik.** Ez az erő úgy mozgatná az alkatrészeket, ahogy a sajáttávolság változik. Hogy szemléletesebb legyen a gravitációs hullám hatása a detektorra, vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy a z -tengely a gravitációs hullám haladási irányával megegyezzen. Helyezzünk el egy rugalmas gyűrűt a haladási irányra merőleges síkban és vizsgáljuk meg, hogyan változik meg az alakja a gravitációs hullám hatására. Az eredményt a 14a ábra mutatja. A hullám a gyűrű periodikus összehúzódsát és nyúlását okozza tengely és haránt irányban egymással ellentétes fázisban. A két polarizáció esetében a tengelyek iránya különbözik, azok egymáshoz képest 90 fokkal elforgatottak.

A gravitációs hullám detektor egy kétkarú interferométer. A működésének lényege a következő: egymással 90 fokos szöget bezáró irányban két fénysugarat indítanak el (A és B), melyek L út megtétele után egy tükörbe ütköznek, és visszaverődnek a forráshoz. Az L hossz úgy van beállítva, hogy a fény λ hullámhossza adott számszor fér rá: $L = n\lambda$. Mivel A és B fénysugár is ugyanakkora utat tesz meg ugyanolyan fázisban érik el a forrást egy oda-vissza út megtétele után, ezért **erősítik** egymást. Ha egy gravitációs hullám halad át a detektoron akkor az egyik fényutat $L - \delta L$ módon rövidíti a másikat $L + \delta L$ módon hosszabbítja. Ekkor már nem igaz, hogy fénysugarak az oda vissza út után erősítik egymást a forrásnál, a különböző hosszúságú utak miatt a torzulás mértékétől függően erősítik vagy gyengítik egymást. Az erősítés és gyengítés időben periodikusan változik, ahogy az utak hossza is periodikusan változik a gravitációs hullámok hatására, így ezzel detektálhatóak a hullám tulajdonságai: frekvenciája, amplitúdójának változása. A 120 metrikában szereplő amplitúdó (h) kapcsolata a fényutak változásával a detektorban a következő:

$$\frac{h}{2} = \frac{\Delta L}{L}, \quad (126)$$

amit **strain**-nek is neveznek. A gravitációs hullámok detektálás nagyon nagy kihívás, ugyanis tipikusan mire a gravitációs hullám eléri a detektort

$h < 10^{-21}$. Ez olyan kicsi elmozdulás, hogy a detektor környezetéből származó rezgések között elveszhet a jel. A tükrök speciális felfüggesztésével és a fényutak hosszának növelésével javítható a detektálás valószínűsége, de még ebben az esetben is csak azokat a gravitációs hullámokat van esély detektálni amik frekvenciája távol esik a tipikus háttérzajok frekvenciájától. Az első gravitációs hullámok detektálásáért felelős detektorok a LIGO és VIRGO melyek karhossza 4 km ill. 3 km. A LIGO detektor starin érzékenysége a frekvencia függvényében a 15 ábrán látható.

A gravitációs hullámok tulajdonságai A gravitációs hullámok természete úgy képzelhető el a legkönnyebben, ha a jobban ismert elektromágneses hullámokhoz hasonlítjuk őket. Hatalmas különbség, hogy míg az elektromos kölcsönhatásban kétféle töltés létezik a gravitációs kölcsönhatás csak vonzó jellegű, és csak egy töltés van a tömeg. Az elektromágneses sugárzás legnagyobb komponense a dipólsugárzás. A dipólmomentum tere két egymáshoz közel elhelyezett ellentétes töltés által kialakított tér. A dipólus nagysága:

$$d = e\Delta x \quad (127)$$



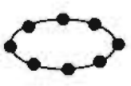





Ha a dipólus változik, mondjuk a töltések gyorsan helyet cserélnek, mint egy antennában, akkor sugárzást bocsájt ki aminek intenzitása:

$$I \propto \frac{d^2}{dt^2}d \quad (128)$$

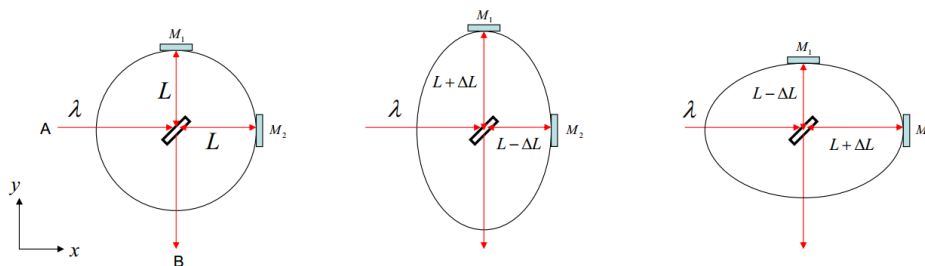
A gravitációs sugárzásnak nincs dipólkomponense. Ha a dipól gravitációs analógiát számoljuk ki, akkor mivel csak egy töltés van:

$$\begin{aligned} d &= m\Delta x \\ \frac{d}{dt}d &= m\frac{d}{dt}\Delta x = p \\ \frac{d^2}{dt^2}d &= \frac{d}{dt}p = 0 \end{aligned} \quad (129)$$

Ahol felhasználtuk, hogy zárt rendszerben az impulzus megmarad tehát időben állandó. Így a gravitációs sugárzás első rendben (tehát legnagyobb járulékot adó tagban) **kvadrupólmomentum** jellegű. A fenti érvelés úgy is felfogható, hogy mivel csak egy gravitációs töltés van a gravitációs dipólmomentum mindig egybeesik a rendszer tömegközéppontjával. A tömegközéppont zárt rendszerben időben állandó az impulzus megmaradása miatt. **Egy**

ωt	h_+	h_\times
0		
$\pi/2$		
π		
$3\pi/2$		

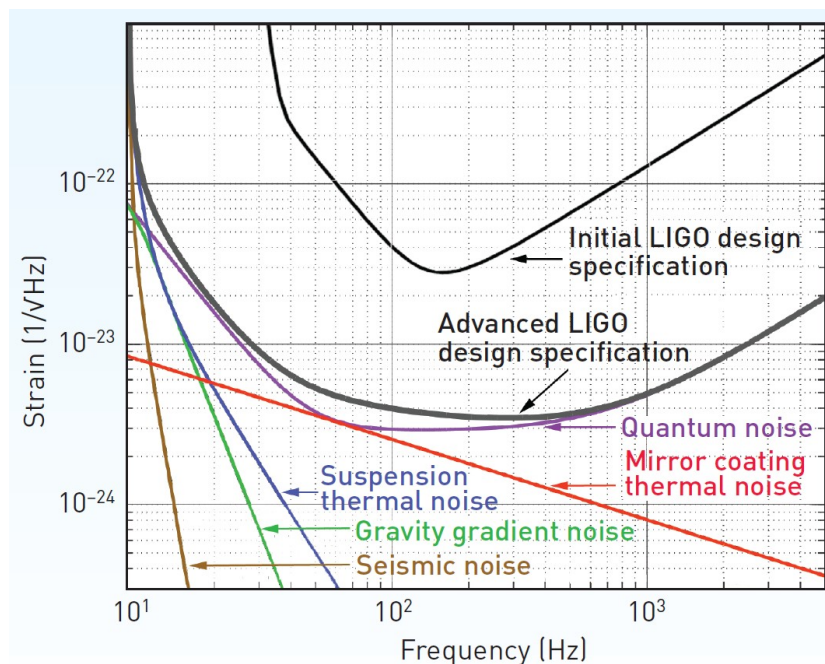
(a) A gravitációs hullám hatása a haladási irányára merőlegesen elhelyezett rugalmas gyűrűre. A kétféle polarizáció hatása más és más irányba torzítja a gyűrűt.



(b) A gravitációs hullámok hatása a detektorra. A detektor karjain lézervény fut tükrök között.

14. ábra

zárt rendszerben ami tömegpontokat tartalmaz csak az aszimmetrikus gyorsulások okoznak gravitációs hullámokat Ennek legfontosabb következménye, hogy a metrika gömbszimmetrikus változása nem eredményez gravitációs hullámot. Például ha egy csillag tökéletes gömbalakban összehúzódik, vagy kitágul nem keletkezik gravitációs hullám. A hétköznapi életben előforduló tömegek és gyorsulások olyan kicsik, hogy az általuk keltett gra-



15. ábra. A LIGO detektor frekvencia érzékenysége. 10 Hz környékén a szeizmikus zajok lehetetlenné teszik a hullámok detektálását. 50 Hz nél nagyobb frekvenciákra a berendezés saját zaja a legerősebb megkötés.

vitációs hullámok nem detektálhatóak, csak az asztrofizikai eredetű források elég nagy tömegűek és mozognak elég nagy sebességgel ahhoz, hogy gravitációs hullámot hozhassanak létre.

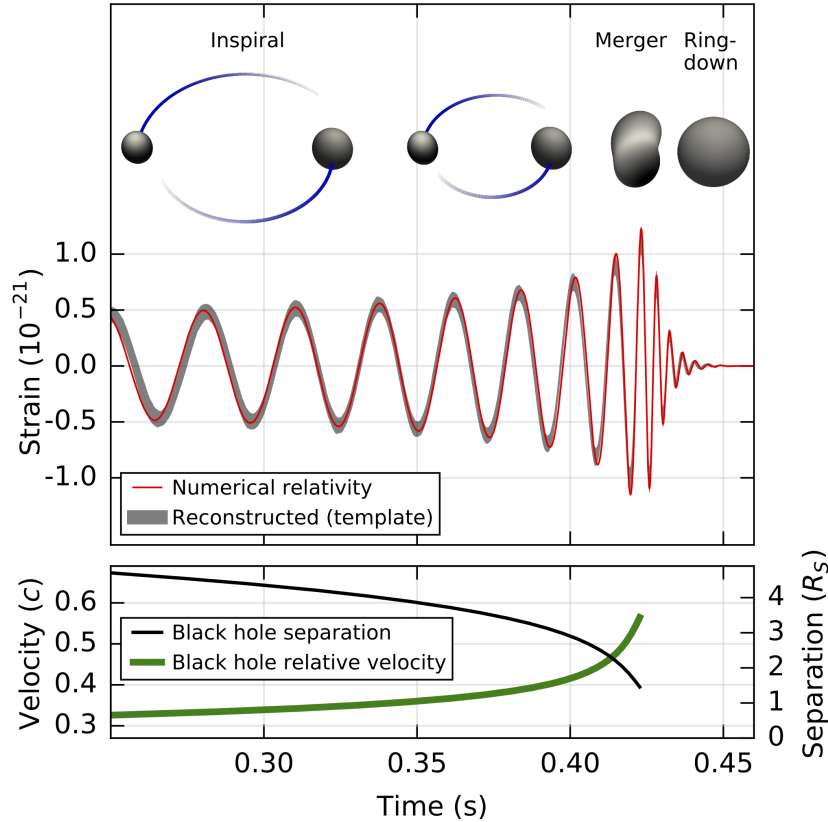
Gravitációs hullámok forrásai A szupernóva robbanások nagy energiájú asztrofizikai folyamatok mely során egy csillag befejezi életét. Ez a csillag anyagának kilökődésével jár, de a robbanás túl aszimmetrikus ahhoz, hogy nagy energiájú gravitációs hullámok keletkezzenek.

A gravitációs hullámok legfontosabb forrásai a **bespiráló kettősök**. Ezek kettős csillagrendszerek ahol az egyik vagy mindkét csillag élete vége felé jár. A nagy tömegű csillagok szupernóvarobbanás keretében fejezik be életüket mi után egy nagy tömegű és sűrűségű, de a csillaghoz képest kis méretű objektum marad vissza. Ezek gyűjtőneve: kompakt asztrofizikai objektumok. Közös jellemzőjük, hogy már nem zajlanak bennük energiatermelő folyamatok, azaz nincs bennük fúzió mint a csillagokban. Általában erősen

sugároznak röntgen vagy infra tartományban ezért vizsgálhatók. Kompakt asztrofizikai objektumok a neutroncsillagok, pulzárak, fehér törpék fekete lyukak. Ezek körül a téridő erősen görbült, a párjukkal egymás körül keringve olyan aszimmetrikus gravitációs gyorsulásnak vannak kitéve ami lehetővé teszi nagy energiájú gravitációs hullámok kisugárzását. A bespirálozás folyamata az 16 ábrán látható. A bespirálozás három fő részből áll:

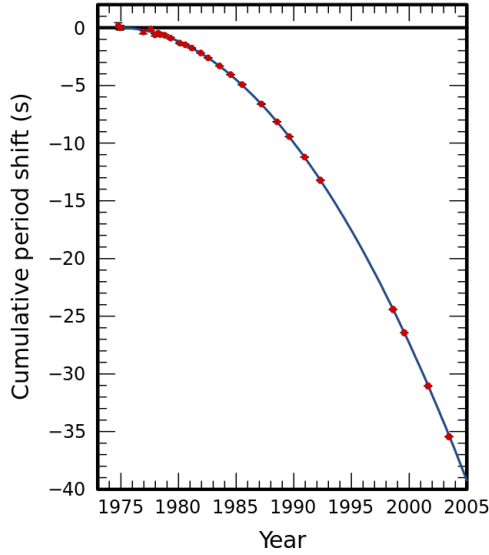
1. **Bespirálozás** A két kompakt objektum egymás körül kering és távolságuk fokozatosan csökken, mivel a gravitációs hullámok formájában energiát sugároznak ki. Ez a szakasz nagyon sokáig is eltarthat (száz-ezer évekig akár), de minél közelebb kerülnek egymáshoz annál nagyobb jelet sugároznak ki. A kibocsájtott jel lassan növekvő frekvenciájú periodikus hullám.
2. **Összeolvadás** A két kompakt objektum nagy sebességgel összeütközik. Mivel az ütközés egyáltalán nem szimmetrikus, ezért a folyamat során kibocsájtódik gravitációs hullám, azonban ennek az alakja nagyon különbözik a bespirálozás során kibocsájtott hullámétól.
3. **Icsengés** A két objektum ütközése után létrejött égitest még nem stabil, és belső átrendeződése során csökkenő amplitúdójú gravitációs hullámot bocsájt ki. Ahogy eléri a legszimmetrikusabb, legstabilabb állapotát leáll a gravitációs hullámok kisugárzása.

Az ezidáig felfedezett gravitációs hullámok forrásainak tulajdonságai a 1 táblázatban láthatóak. A hullámok mind bespirálozó kettősökből származnak, a táblázatban láthatók a kettőst alkotó objektumok tulajdonságai (BH = fekete lyuk, NS = neutron csillag). A hullámok neve a detektálás időpontját rögzítik, tehát GW150914-et 2015. 09. 14-én detektálták. Az objektumok tömege olyan nagyon, hogy naptömegben kell megadni. Mivel a naprendszer tömegének 99,9%-a ezért ez naprendszer tömeget is jelent. A kettős rendszerek távolsága Mpc-ben van megadva. $1 pc \approx 3,26 \text{ fényév}$, ezért $1 Mpc \approx 3,26 \text{ millió fényév}$. Összehasonlításképpen: A tejút átmérője $\approx 0,1 - 0,18 \text{ millió fényév} \approx 0.031 - 0.055 Mpc$. Egyik gravitációs hullám sem a galaxisunkról belülről jött. A legközelebbi galaxis az Androméda, $2,5 \text{ millió fényév} \approx 0,7 Mpc$ távolságra van, ez segít kontrasztba helyezni a távolságokat. A galaxison belülről közvetett bizonyítékok vannak a gravitációs hullámokra. A Taylor-Hulse pulzárt 1974-ben fedezték fel, és két egymás körül keringő neutron csillag alkotja. A Sas csillagképben helyezkedik el tőlünk 21000 fényévre. A neutroncsillagokból érkező jeleket vizsgálva sikerült



16. ábra. A bespirálozás fázisai. A példa az elsőként detektált gravitációs hullámra vonatkozik (GW150914) A folyamatban két fekete lyuk ütközött össze és állt össze egy nagyobb tömegű fekete lyukká. Az ütközés előtt a testek sebessége elérte a fénysebesség felét. A hullámforma mellett látható, hogy mekkora az a relatív hosszváltozás amit a hullám okoz a detektorban.

a rendszer adatait meghatározni, amiből kiderült, hogy a neutroncsillagok pályájának sugara fokozatosan csökken. A csökkenés oka, az, hogy a kibocsájtott gravitációs hullámok energiát visznek el a rendszerből. A mért adatok és a gravitációs hullámokon alapuló számolás összehasonlítása a 17 ábrán látható. A mérések tökéletesen egybeesnek a relativitáselmélet jóslataival, ezért a következtetés az, hogy a kettős rendszer a bespirálozás kezdeti szakaszában van. A rendszerből kiinduló gravitációs hullámok még túl kicsik ahhoz, hogy detektálni lehessen őket közvetlen módon.



17. ábra. A Taylor-Hulse bináris rendszer pályájának csökkenése az idő függvényében. A mért adatok (piros pont) egybeesnek a relativitáselméleten alapuló jóslattal (fekete vonal) ami azon alapszik, hogy a gravitációs hullámok miatt veszít energiát a rendszer.

1. táblázat. 2018-ig detektált gravitációs hullámok forrásai

név	1 objektum		2 objektum		távolság [Mpc]
	tömeg [M_{Nap}]	típusa	tömeg [M_{Nap}]	típusa	
GW150914	$36,5^{+5}_{-4}$	BH	29^{+4}_{-4}	BH	410^{+160}_{-180}
GW151226	$14,2^{+8,3}_{-3,7}$	BH	$7,5^{+2,3}_{-2,3}$	BH	440^{+180}_{-190}
GW170104	$31,2^{+8,4}_{-6,0}$	BH	$19,4^{+5,3}_{-5,9}$	BH	880^{+450}_{-390}
GW170814	$30,5^{+5,7}_{-3}$	BH	$25,3^{+2,8}_{-4,2}$	BH	540^{+130}_{-210}
GW170817	1,36-1,6	NS	1,17-1,36	NS	40^{+8}_{-14}

3.4. Ajánlott irodalom

- Hraskó Péter. *Relativitáselmélet*. typotex, 2017
- Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. <http://www.eftaylor.com/exploringblackholes/>
- Michele Maggiore. *Gravitational Waves Volume 1 Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2017

4. Kvantummechanika alapjai

4.1. Kvantált energiaszintek, anyaghullámok

Diszkrét energiaszintekre utaló kísérletek

Fekete test sugárzása A huszadik század elején a fizikai kutatások központi témája volt az abszolút fekete test hőmérsékleti sugárzásának leírása. A termodinamikából tudták, hogy minden test hőmérsékleti egyensúlyra törekszik a környezetével. A melegebb test hűl, míg a környezete kicsit melegszik a leadott hőtől. A hőcsere akkor áll le amikor a test és a környezetének a hőmérséklete megegyezik. A hőmérsékleti sugárzás vizsgálatánál arra voltak kíváncsiak, hogy milyen módon áll be a fentebb leírt egyensúly ha test a környezetével csak hősugárzás útján cserélhet energiát (tehát a hővezetés és a hőáramlás nem áll rendelkezésre). A hőmérsékleti sugárzás az elektromágneses hullámok egy fajtája, ami látható spektrumon kívülre esik, de láthatóvá tehető például hőkamerák segítségével. Hőmérsékleti sugárzást bocsát ki például egy felmelegített kályha. Ha a közelébe megyünk érezhetjük is, hogy testünk melegszik, és a kályha hőt ad át. Ennek a sugárzásnak a természetet vizsgálták a fizikusok kísérleti körülmények között. Kályha helyett egy állandó hőmérsékleten tartott üreget vettek amibe egy kis lyukat fűrtak. A lyukból kijövő sugárzás egy tökéletesen fekete test sugárzásának felel meg. A "tökéletesen fekete" azt jelenti ebben a terminológiában, hogy a test minden ráeső sugárzást elnyel. Mivel az üreg zárt és belülről fűtik, jó közelítéssel teljesül, hogy minden sugárzást elnyel.

Az abszolút fekete testre vonatkozó kísérleti eredmények matematikai leírása a klasszikus elektrodinamika törvényeivel nem volt lehetséges. Max Planck-nak sikerült olyan matematikai modellt találnia ami sikeresen magyarázta az eredményeket, azonban ehhez új fizikai feltevésre volt szükség. Planck érvelés a következő volt:

- Az üreg belsejében elektromágneses hullámok szállítják az energiát, ezért az üreg fala és a benne lévő elektromágneses sugárzás között alakul ki hőmérsékleti egyensúly. Az üregben csak olyan hullámok jöhetnek létre amik a falakon nulla értéket vesznek fel (hiszen nem hatolnak át rajta), ami fizikailag azt jelenti, hogy ha az üreg falainak távolsága L , akkor az előforduló hullámhosszakra igaz kell, hogy legyen $L = n\lambda$, ahol n egész szám és λ a hullámhossz.

- Klasszikusan az energiaátadás az elektromágneses tér és a fal között úgy megy végbe, hogy a sugárzás egységnyi felületre egységnyi idő alatt adott mennyiségű energiát szállít amit az elnyel. Planck azt tette fel, hogy **az energiaátadás a hullámhossztól függő nagyságú energiaadagokban történik és ennél kisebb mennyiségű energia nem adódhat át a falnak, csak ennek az energiaadagnak az egész számú többszöröse.** Fontos, hogy ez az energiaegység különböző hullámhosszú hullámokra más, és átadásához nincs szükség időre. Tehát az elektromágneses sugárzás hatása a klasszikus esetben egy slagból folytonosan kifolyó vízhez hasonló (bármilyen kis mennyiség kiengedhető), míg a Planck-féle leírásbank inkább egy puskából kilőtt golyókhöz (ugyanazt az energiát több kis csomagban adja át). Az energiacsomag olyan kicsi, hogy a hétköznapi életben folytonosnak tűnik az energiaáram. Egy atom szemszögéből úgy tűnik, hogy egyszerre egy csomagban megérkezik az energia, majd utána egy ideig nem jön semmi (hiszen a sugárzás teljesítménye állandó, tehát adott idő alatt ugyanaz ugyanannyi energia áramlik át, csak másképp beosztva.)

Planck formulája az adott hullámhosszú elektromágneses hullámokhoz tartozó legkisebb energiaadagra:

$$\boxed{E = h\nu} \quad (130)$$

ahol $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ a Planck-állandó, és $\nu = \frac{c}{\lambda}$ az elektromágneses sugárzás frekvenciája

Fotoeffektus Planck fizikai feltevésének vizsgálata és az energiakvantum létezésnek bizonyítása szempontjából fontos lépés volt a fotoeffektus megértése. A fotoeffektus jelensége abban áll, hogy a fémekben, kötött állapotban lévő elektronok szabaddá válnak, ha megfelelő mennyiségű energiát kap a fém felületére eső fénytől. Megfelelő kísérleti berendezésben a különböző frekvenciájú fény hatására a fémből kilépő elektronok energiája és száma mérhető. A mérések során a következőket tapasztalták:

- Az elektronoknak történő energiaátadás azonnal végbemegy a Planck által leírt energiaadagokban. Klasszikusan több percet kellene várni, mire a fény átad annyi energiát egy elektronnak ami a kiszabadításához szükséges, a mérések szerint azonban ez azonnal végbemegy. Ennek fő oka az, hogy klasszikusan a fény energiája adott felületen oszlik el

és adott idő alatt adódik át. Mivel az elektron felülete klasszikusan nagyon kicsi, sokat kell várnia míg elég energiát gyűjt.

- A kiszabadult elektron energiája csak a megvilágító fény színétől és a fémtől függ, de nem függ a fény intenzitásától.
- A kiszabadult elektronok száma egyedül a fény intenzitásától függ.

A tanulság az, hogy az elektron-fény kölcsönhatás időben és térben is pontszerű, azaz az energiaadag átadása pillanatszerűen történik és nem függ az elektromágneses tér fluxusától, azaz, hogy milyen gyakran érkeznek energiacsomagok. Egy energiacsomag egy elektronnal hat kölcsön és nem történik olyan hogy két energiacsomag egy elektronnal hat kölcsön.

A fenti tulajdonságok miatt el lehet képzelni az elektromágneses kölcsönhatást úgy, mint sok kis energiacsomag cseréje, melyeket **foton**oknak nevezünk és ezek hatnak kölcsön az elektronokkal. Tartózkodnunk kell azonban attól, hogy a fény terjedését kicsi fotoncsomagok áramlásaként képzeljük el. A fény továbbra is elektromágneses hullámként terjed, annak minden tulajdonságával. A fotonkép a fény és az anyag kölcsönhatásának jellemzésére szolgál, ami pontszerű esemény. A fotoeffektus fizikai üzenete az, hogy az elektromos mezők és részecskék közötti kölcsönhatás nem úgy megy végbe, mint ahogy klasszikus fizikában az erőterek és kis méretű töltéssel rendelkező golyók között. Az energia (és impulzus) átadása az elektromágneses hullám frekvenciájától függő méretű adagokban történik, amiket fotonoknak nevezünk. Az alapvető kölcsönhatás egy foton és egy elektron között megy végbe hasonlóan két golyó ütközéséhez.

A fenti eredményeket felhasználva a fotoeffektus kísérleti eredményei megmagyarázhatóak. Egy foton energiája $E = h\nu$. Ez a foton egy elektronnal hat kölcsön, és a mérések szerint teljesen elnyelődik. Energiája így részben arra fordítódik, hogy az elektront kötött állapotból kiszabadítsa részben pedig arra, hogy felgyorsítsa:

$$\begin{aligned} E &= W + K \\ h\nu &= W + \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \tag{131}$$

ahol W az adott fémbe az elektron kötési energiája (kilépési munkának is hívják) és minden fémre más és más, K pedig a kilépő elektron mozgási energiája.

- Adott színű fényre $\nu = \text{ll.}$, ezért a kilépő elektronok mozgási energiája $K = h\nu - W$, ami a méréseknek megfelelően tényleg csak a fény frekvenciájától és a fémre jellemző kötési energitától függ.
- Ha a fény intenzitása nagyobb akkor adott idő alatt több energiát hordoz azaz nagyobb a teljesítménye a fémen: $P_{fny} = \frac{\Delta E_{fny}}{\Delta t} = \frac{NE_{foton}}{\Delta t}$, ahol N a t idő alatt érkező fotonok száma. N foton N elektronnal lép kölcsönhatásba és N szabad elektront eredményez a fentiek szerint. Így erősebb fény több elektront eredményez, de mindegyik energiája ugyanannyi lesz.
- a 131 képletből az is látszik, hogy ha W túl nagy ν -höz képest akkor a folyamat nem tud végbemenni, mert a foton nem tudja fedezni az elektron kiszabadításához szükséges minimális energiát. Adott W -hez tartozó minimális hullámhossz: $\nu = W/h$. Különböző frekvenciájú fényvel megvilágítva a fényt valóban csak a fenti feltételnek eleget tevő esetben jelentkezik az effektus. Ez az egyik legfőbb bizonyíték arra, hogy egy foton egy elektronnal hat kölcsön: az elektron nem tud bevárni egy második foton, hogy legyen elég energiája a kiszabaduláshoz.

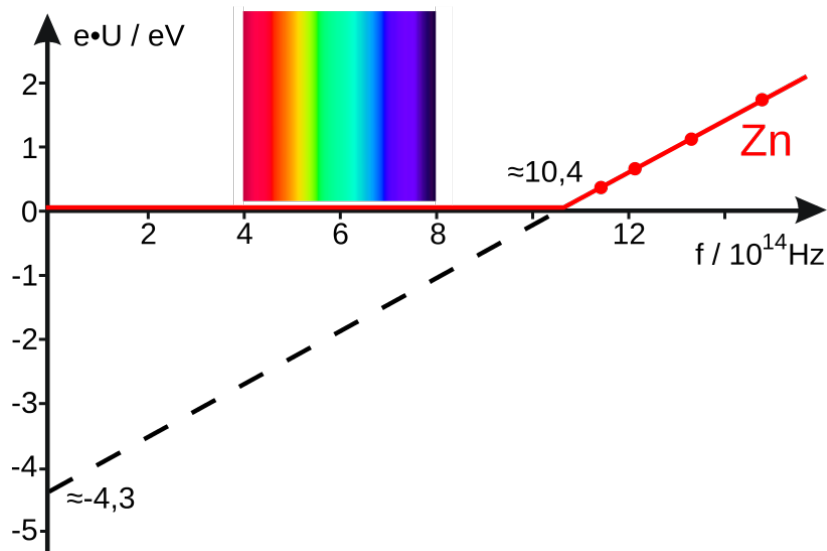
Felhasználva a 131 egyenletet felírhatjuk az elektron mozgási energiáját mint a megvilágító fény frekvenciájának függvényét.

$$K = h\nu - W \quad (132)$$

Ez egy lineáris függvény ami az y tengelyt $-W$ -ben metszi, és meredeksége h 18.

Elnyelési és kibocsájtási spektrumok Különböző anyagok által kibocsájtott fény spektroszkópiai elemzése szintén a fotonkép helyességére utal. Egy izzószálból kiinduló fény sok különböző frekvenciájú fényhullámból áll össze. A prizma ezeket a szivárvány színei szerint felbontja egy folytonos spektrummá. Ha a prizma előtt ez a fény egy olyan anyagon halad át amiben valamelyik adott frekvenciájú komponense kölcsönhatásba tud lépni egy elektronnal, akkor elnyelődik és hiányozni fog a spektrumból. Ehhez az kell, hogy egy foton energiája egyenlő legyen az elektron számára elérhető két energiaszint különbségével:

$$h\nu = E_1 - E_2 \quad (133)$$



18. ábra. A Zn-re vonatkozó fotoeffektus. Az y-tengelyen a fény hatására szabaddá váló elektronok energiája látható eV egységekben

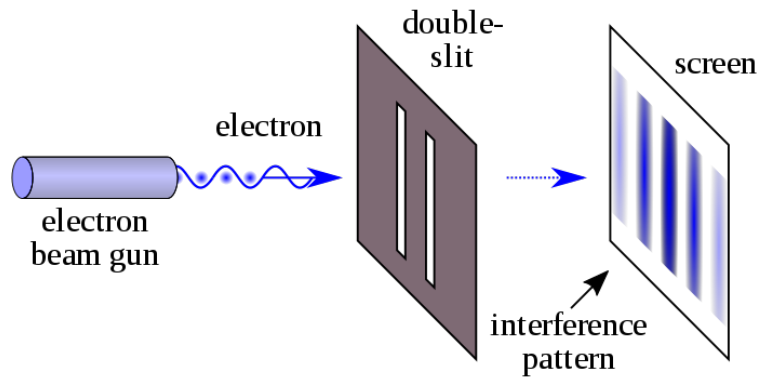
Látható, hogy ez a jelenség csak akkor magyarázható, ha egy elektron egy fotonnal hat kölcsön és az energia átadása $h\nu$ adagokban történik. Ezzel párhuzamosan az is látható, hogy a fény hullámként viselkedik a a prizma eltéríti az optikában tanultaknak megfelelően.

Az részecskék hullámszerű viselkedése

Két rés kísérlet Az előző részben láthattuk, hogy a fény anyaggal történő kölcsönhatása során részecskeszerű viselkedést mutat mintha fényrészecskékből, fotonokból állna. Az elektronok kétrés kísérlete rámutatott arra, hogy a részecskéknak is vannak hullámszerű tulajdonságai. A kétrés kísérlet először fotonokkal végezték el 1909-ben majd 1961-ben elektronokkal is sikerült megvalósítani.

A kísérletben két egymáshoz közel elhelyezett résen elektronsugarat bocsájtanak keresztül. Klasszikusan azt várjuk, hogy a rések mögött elhelyezett ernyőn két pont képét láthatjuk, azonban ehelyett egy interferencia képet kapunk 19. Az interferenciakép hullámok esetén nem szokatlan jelenség: a két lyuk a beérkező hullámot felbontja két gömbhullámra, és ezek interferenciája alakítja ki az ernyőn látható képet. (A két lyukból az ernyő egy adott pont-

jához húzott egyenesek különböző hosszúságúak. Ahol a hosszkülönbségük $r_2 - r_1 = n\lambda$ ott a hullámok erősítik egymást, mert azonos fázisban érnek oda.) A meglepő eredmény az, hogy a részecskének elképzelt elektronok is interferenciát mutatnak. Még meglepőbb eredményeket kapunk, ha a kísérletet nagyon kis intenzitású elektronnyalábbal végezzük. Ha annyira lecsökken az intenzitás, hogy egyszerre csak egy elektron van jelen a berendezésben, akkor is kialakul az interferencia kép. Ilyenkor az ernyőn az elektronok egyenként villannak fel véletlenszerűen, de csak azokon a pontokon ahol az interferencia megengedi a jelenlétüket ²⁰. Ez egyértelműen bizonyítja, hogy az elektronok interferenciája nem egymással való kölcsönhatásuknak köszönhető, egy elektron is képes interferenciára.

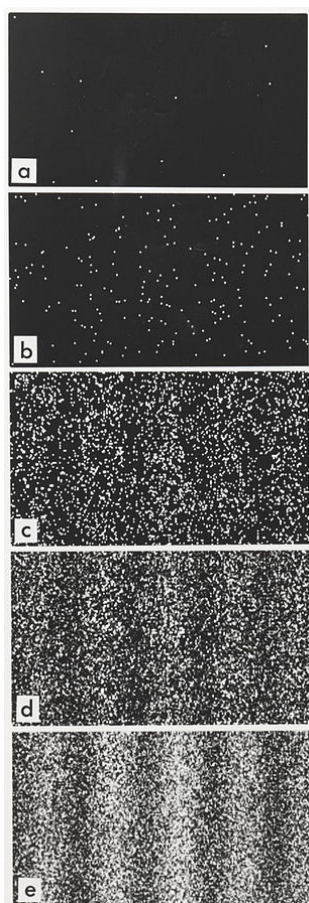


19. ábra. Kétrés kísérlet vázlatja

De-Broglie hullámhossz A két rés kísérlet eredményeit De-Broglie az általa bevezetett anyaghullámokkal magyarázta. Minden részecskéhez az impulzusa alapján egy

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (134)$$

hullámhosszú síkhullámot rendelt, és ennek a síkhullámnak az interferenciaképe határozza meg, hogy az elektron mint részecske hova kerülhet az ernyőn. Ahol az interferenciakép intenzitása magas ott nagy valószínűséggel detektálunk elektront, ahol pedig nulla ott egyáltalán nem. A hétköznapi életben előforduló testekre a De-Broglie hullámhossz nagyon kicsi, sokkal kisebb mint a test mérete, ezért nem tapasztaljuk a hullámszerű viselkedést. Az elemi részecskékre ez már nem igaz, például egy 10 eV -os elektronra $\lambda \approx 10^{-10} \text{ m}$ ami



20. ábra. Az interferencia kialakulása kis intenzitású nyaláb esetén

az atomok méretével egyezik meg. Mivel ilyen kis rést kísérletileg előállítani nehéz, az elektronokra vonatkozó kétrés kísérlet sokáig váratott magára.

Hullám-részecske kettősség Az anyaghullámok és a fotonok bevezetését azt tette lehetővé, hogy a részecskék bizonyos körülmények között hullámként az elektromágneses hullámok pedig bizonyos körülmények között részecskéként viselkednek (fotonok). Ez valójában azt fejezi, hogy sem a hullám, sem a klasszikus részecske kép nem megfelelő a részecskék fizikájának leírására. Az elektron nem hullám, és nem is részecske egy összetettebb jelenség. Ha konkrét képet akarunk kapni, akkor el kell vetnünk a hagyományos részecske képet, és a Newton törvényeket, mert az elemi részecskékre más mozgás-

törvények vonatkoznak. Konkrét matematikai leírást a kvantumtérelmélet szolgáltat, ami képes elszámolni a hullámszerű és részecskeszerű tulajdonságokkal.

Ezen a szinten gondolhatunk úgy a részecskékre mint egy mindent kitöltő anyagmezőre. A De-Broglie hullámhossz által megadott hullám a "mozgásegyenlet" ami meghatározza hol léphet kölcsönhatásba a részecske más részecskével. Ahol a hullám intenzitása nagy ott nagy valószínűséggel hat kölcsön az elektron, ott az elektron, mint klasszikus részecske megtalálási valószínűsége nagy. Az anyagmező kölcsönhatásai mindig térben és időben lokálisak és a mező egy kvantumja ($E = h\nu$) vesz részt ezekben a kölcsönhatásokban.

Compton szórás Láttuk, hogy az elektron a két rés kísérletben hullámként viselkedik, a foton pedig részecskeszerű tulajdonságokat mutat. Compton 1922-ben elvégzett kísérlete egyértelműen igazolta a fenti feltevéseket. A kísérletben röntgen sugarakat bocsájtott szén minta atomjaira, melyek eltérítették a fény útját, és csökkentették energiáját. A fényt úgy lépett kölcsönhatásba az elektronokkal mintha fotonok kis golyócskaként ütköznének a minta elektronjaival. A Compton-szórás volt az egyik legmeggyőzőbb kísérleti bizonyíték arra, hogy a részecskék hullámszerű viselkedést, a hullámok pedig részecskeszerű viselkedést mutatnak, és hogy valamilyen összetettebb jelenség két oldalát képviselik.

A Compton szórás vázolata a 21 ábrán látható.

Az elektron felé haladó foton energiája a fotoeffektus alapján számolható, impulzusa pedig a speciális relativitáselméletből következik:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= h\nu_1 \\
 E_1 &= \sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} \quad , m = 0 \rightarrow \\
 p_1 &= \frac{E_1}{c} = \frac{h\nu_1}{c} = \frac{h}{\lambda_1}
 \end{aligned}
 \tag{135}$$

ahol felhasználtuk, hogy a foton nyugalmi tömege 0 és, hogy $c = \lambda\nu =$. A foton impulzusára kapott eredmény (melyhez csak a speciális relativitáselméletet használtuk) megegyezik azzal, amit De-Broglie feltevése jósol (134). Az elektron energiája és impulzusa az ütközés előtt:

$$\begin{aligned}
 E_0 &= mc^2 \\
 p_0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{136}$$

Az ütközés után a foton iránya, energiája, és impulzusa megváltozik, és θ szöget zár be az eredeti irányával (21 ábra.)

$$\begin{aligned} E_2 &= h\nu_2 \\ p_2 &= \frac{E_2}{c} = \frac{h}{\lambda_2} \end{aligned} \quad (137)$$

Az ütközés után az elektron felgyorsul és megváltozik az impulzusa, energiája:

$$\begin{aligned} E^2 &= p_e^2 c^2 + E_0^2 \\ p_e &= \sqrt{E^2 - E_0^2} \end{aligned} \quad (138)$$

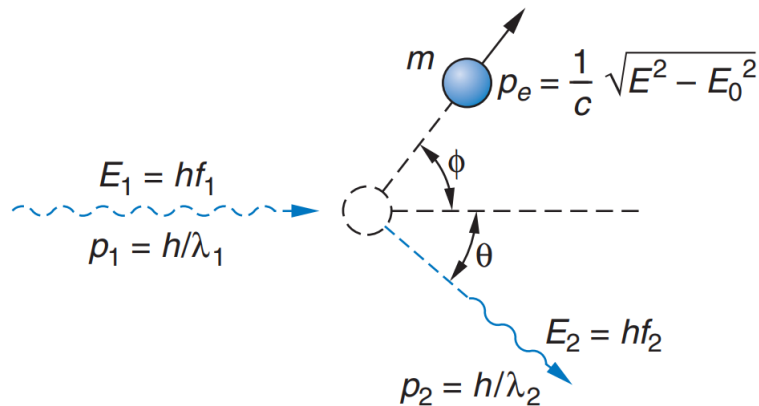
A cél, hogy megadjuk a szórt foton hullámhossza és iránya közötti összefüggést, mert ezt lehet kísérletileg mérni. Ehhez az energia és impulzus megmaradását kell felhasználnunk. Mivel nincs szükség az elektron impulzusára, ezért a stratégia az, hogy az energia és az impulzus megmaradásából is kifejezzük az elektron impulzusát és a két kifejezést egyenlővé tesszük. Az impulzus vektormennyiség, ezért a megmaradási egyenlete:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_e &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \quad \rightarrow \\ p_e^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta) \end{aligned} \quad (139)$$

Az energia megmaradása:

$$\begin{aligned} E_1 + E_0 &= E_2 + \sqrt{p_e^2 c^2 + E_0^2} \quad \rightarrow \\ E_0^2 + (E_1 - E_2)^2 + 2E_0(E_1 - E_2) &= E_0^2 + p_e^2 c^2 \quad \rightarrow \\ p_e^2 c^2 &= (E_1 - E_2)^2 + 2E_0(E_1 - E_2) \\ p_e^2 &= (p_1 - p_2)^2 + 2E_0 \frac{p_1 - p_2}{c} \end{aligned} \quad (140)$$

ahol először négyzetre emeltük az energia megmaradására vonatkozó egyenletet, és felhasználtuk, hogy $p = Ec$. A fenti formulát p_e -re behelyettesítjük



21. ábra. Compton-szórás vázlata

az impulzus megmaradásából nyert egyenletbe p_e -re.

$$\begin{aligned}
 p_e^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + 2E_0 \frac{p_1 - p_2}{c} \\
 p_e^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos(\theta) \quad \rightarrow \\
 -2p_1p_2 \cos(\theta) &= -2p_1p_2 + 2E_0 \frac{p_1 - p_2}{c} \\
 \frac{c}{E_0}(1 - \cos(\theta)) &= \frac{p_1 - p_2}{p_1p_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}
 \end{aligned} \tag{141}$$

Felhasználva, De-Broglie hullámhosszt ($p = h/\lambda$) és, Einstein eredményét az elektron nyugalmi energiájára: $E_0 = mc^2$:

$$\boxed{\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos(\theta))} \tag{142}$$

Ez az összefüggés amit a Compton-kísérletben kimérték: adott eltérülési szög esetén meghatározza a röntgen sugárzás hullámhosszát. A $\lambda = \frac{h}{mc}$ mennyiséget az elektron Compton-hullámhosszának nevezzük.

Compton-hullámhossz A Compton-hullámhossznak érdekes fizikai jelentése van. Definíció szerint úgy számolhatjuk ki egy részecske Compton-hullámhosszát, hogy a részecske relativisztikus energiáját egyenlővé tesszük

egy foton energiájával, majd kifejezzük a foton hullámhosszát.

$$\begin{aligned} E_{\text{részecske}} &= mc^2 \\ E_{\text{foton}} &= h\nu = \frac{hc}{\lambda} \\ mc^2 &= \frac{hc}{\lambda} \\ \lambda &= \frac{h}{mc} \end{aligned} \tag{143}$$

Ez a hullámhossz határozza meg azt a méret tartományt ami alatt már nem lehet elhanyagolni a kvantummechanikai effektusokat és semmilyen klasszikus közelítés nem jó. Miért? Képzeljük el, hogy lokalizálni szeretnénk egy ilyen részecskét, úgy, hogy fényt szórátunk rajta és abból visszakövetkeztetjük részecske helyét. Ehhez a részecske méretével összemérhető hullámhosszú fényre van szükség, hiszen a fény hullámhosszánál kisebb méretű dolgokat nem tudunk felbontani (a képet elmossa az interferencia és fényelhajlás). Tehát minél kisebb hullámhosszú fényre van szükség, de a hullámhossz csökkentésének a Compton-hullámhossz határt szab. A definíció szerint egy Compton-hullámhosszú foton energiája pont elég ahhoz, hogy létrehozzunk belőle még egy ugyanolyan részecskét, mert fedezi a részecske tömegének megfelelő relativisztikus energiát. A fenti folyamat végbe is megy, ezért fenn áll a lehetőség, hogy a részecske helyének mérése közben létrehozunk még egy részecskét, ami megkülönböztethetetlen az eredetitől. Az eredmény az, hogy a részecske helyét pontosabban tudjuk viszont kreáltunk még egy részecskét aminek semmit nem tudunk a helyéről, és nem tudjuk megkülönböztetni az eredetitől.

Egy gondolkísérlet a fentiek szemléltetésére: Egy részecskét dobozba zárunk, és elkezdjük csökkenteni a doboz méretét, így egyre pontosabban tudjuk a helyét. (Mondjuk egy munkahengerben van egy elektron.) Egészen addig nem történik semmi amíg nem érjük el azt, hogy a részecske egy Compton-hullámhossz méretű helyre van bezárva. A méret csökkentése energiabefektetéssel jár, hiszen a részecske ütközik a fallal és munkát kell végeznünk az így kifejtett erővel szemben. A Compton-hullámhossz esetén az így elvégzett munka pont akkora, hogy fedezni tudja még egy részecske keletkezését, így azzal, hogy bentebb nyomjuk a hengert kreálunk még egy részecskét. Így csak azt tudjuk mondani, hogy részecskék csoportja egy adott méretű helyre van bezárva, de külön-külön egyik részecskéről sem tudunk semmit.

Ezeket a folyamatokat amik a Compton-hullámhossznál kisebb távolságokon mennek végbe a hagyományos kvantummechanika nem magyarázza meg, ehhez kvantumtérelméletre van szükség, mely a kvantummechanika és a speciális relativitáselmélet elveit egyesíti, és így el tud számolni a részecskék keletkezésével.

4.2. Schrödinger-egyenlet, hullámmechanika

Az anyaghullámok általánosítása

Fentebb láttuk, hogy a hullám-részecske kettősség részecskéket és elektromágneses hullámokat egyaránt leír. Egy foton energiája $E = h\nu$ és egy részecske hullámhossza $\lambda = h/p$. A fentieket úgy általánosítjuk, hogy a részecskékhez is hullámot rendelünk ami a fenti összefüggések alapján adja meg az impulzus és az energiát. Ehhez nézzük meg, hogy egy általános síkhullám egy dimenzióban hogyan írható fel:

$$y(x, t) = A e^{i2\pi\left(\frac{x/c-t}{T}\right)} \quad (144)$$

A formula működése:

- Az Euler formula alapján: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$. Azaz a fenti kifejezés valós része egy \cos függvény. A számolások során könnyebb az exponenciális függvényre vonatkozó képleteket használni, és a végén visszatérhetünk a \cos -ra, ha vesszük az eredményt valós részét.
- Egy origóban történő rezgés egyenlete:

$$\begin{aligned} y(t) &= A e^{i2\pi(-t/T)} \quad \rightarrow \\ y(t) &= A \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \end{aligned} \quad (145)$$

Ahol T a rezgés periódusideje. A \cos függvény 2π periodikus, a t/T hányados azt mondja meg, hogy éppen hányad részét tettük meg a 2π -nek.

- A hullám sebessége c és a pozitív irányba halad az x -tengely mentén. x távolságot ezért x/c idő alatt tesz meg. Ennyi idő alatt ér a rezgés forrásban (origóban) $t = 0$ beli állapota az x pontba. Ez a hullám terjedése. Ezért a függvény argumentumába $x/c - t$ -t kell beírunk, mert meg kell egyezni a kifejezésnek az $x = 0$ pontban és $t = 0$ időpontban vett vett helyettesítési értékkel

Érdemes más változókra váltani:

$$\begin{aligned} x/c &= \frac{xT}{\lambda} \quad \rightarrow \\ \frac{2\pi}{T} &= \omega \quad \text{körfrekvencia} \\ \frac{2\pi}{\lambda} &= k \quad \text{hullámszám} \end{aligned} \quad (146)$$

$$\boxed{y(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}} \quad (147)$$

Felhasználjuk a De-Broglie hullámhosszt:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (148)$$

A fotonok és részecskék energiáját így fejezhetjük ki:

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{T} = \hbar\omega \quad (\nu = 1/T) \quad (149)$$

Ezeket beírva 147 egyenletbe megkapjuk a szabad részecskéket leíró anyag-hullámot:

$$\boxed{\psi(x, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}} \quad (150)$$

Ez hullám írja le a szabad részecskéket. Ahol a hullám intenzitása ψ^2 nagy, ott nagy valószínűséggel hat kölcsön részecskeként (nagy a megtalálási valószínűsége). Az interferenciajelenségeket ezzel a hullámmal számolva írhatjuk le. Az anyaghullámok klasszikus hullámokként viselkednek és szuperpozíciójuk, interferenciájuk a klasszikus hullámokhoz hasonlóan számolható.

Schrödinger egyenlet

Az anyaghullámhoz tartozó részecske energiáját a következő módon számolhatjuk ki:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} \psi = E\psi \quad (151)$$

Azaz deriváljuk idő szerint a függvényt, és az eredményt leosztjuk az eredeti függvénnyel.

Az impulzus hasonlóan adható meg:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi = p\psi \quad (152)$$

Az impulzus négyzetét például ismételt alkalmazással kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi \right) &= p \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi = p^2 \psi \\ -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi &= p^2 \psi \end{aligned} \quad (153)$$

A 151 és 152 kifejezésekben lévő kifejezéseket amik a bal oldalon hatnak a ψ hullámfüggvényre az energia ill. az impulzus **operátorának** nevezzük. Az elnevezés oka az, hogy a fizikai mennyiséget a hullámfüggvényen való "operálás", hatás után kapjuk meg. Ezeket a kifejezéseket általánosan igaznak fogadjuk el, és ezek lesznek az impulzusnak és energiának mint fizikai mennyiségeknek a definíciói. Ha ez teljesül akkor továbbra is igaznak kell lennie egy részecske energiájára vonatkozó kifejezésnek. Klasszikusan ez a mozgási energia és a helyzeti energia összege.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (154)$$

A Schrödinger-egyenlet ennek a ténynek az általánosítása, kifejezése anyag-hullámokkal és operátorokkal:

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + V(x)\psi \quad (155)$$

Használjuk fel a fentebb levezetett formulákat 151, 152:

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} \psi = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + V(x)\psi} \quad (156)$$

Ami a Schrödinger-egyenlet. A fenti érvelés nem az egyenlet levezetése, az egyenlet tartalmát, motivációját szemlélteti. Az egyenlet helyességét, mérésekkel ellenőrizni kell. Az egyenlet és következményei kiállták a kísérletek próbáját, és elfogadottá vált, mint a kvantum részecskék viselkedését leíró dinamikai egyenlet (nem relativisztikus esetben). A Schrödinger-egyenlet megoldása $V = 0$ esetben a már tárgyalt 150. Általános esetben $V \neq 0$ és ekkor a megoldás már más lesz.

Zárt rendszerekben, időben állandó külső körülmények (peremfeltételek) esetén a 156 egyenlet szét választható két egyenletre. Az egyik az időfejlődést írja le a másik a hullámfüggvény alakját. Már láttuk, hogy a Schrödinger-egyenlet jobb oldala a rendszer energiáját jelenti. **Ha a rendszer energiája állandó**, mert pl zárt, és nem közlünk vele hőt, vagy elektromágneses

energiát akkor a 152 képletben lévő energia időben állandó konstans mennyiség. Ezt behelyettesítve a Schrödinger egyenletbe kapjuk az időfüggetlen Schrödinger-egyenletet:

$$E\psi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) \quad (157)$$

Ekkor a rendszer idő és térváltozói szeparálódnak, és függetlenül kezelhetők. Az időfüggést az alábbi egyenlet adja, aminek megoldása mindig ugyanaz:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) &= E\psi(t) \\ \psi(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \end{aligned} \quad (158)$$

A teljes megoldás a két részmegoldás szorzata:

$$\psi = \psi(x)\psi(t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (159)$$

Hullámfüggvény A Schrödinger-egyenlet megoldását hullámfüggvénynek nevezzük. Általános esetben tér és időváltozóktól egyaránt függ és a teljes vizsgált fizikai rendszer állapotát rögzíti, azaz a rendszer minden fizikai tulajdonsága kiszámítható belőle. Sok a félreértés a hullámfüggvény jelentését illetően, ezért az alábbiakban a legfontosabb tulajdonságait felsoroljuk:

- A hullámfüggvényből fizikai mennyiségek kiszámíthatók, de maga a hullámfüggvény nem fizikai mennyiség, nem mérhető semmilyen berendezéssel közvetlenül.
- Részecskéknél, atomoknak külön nincs hullámfüggvénye. A hullámfüggvényt mindig egy fizikai rendszerhez rendeljük ami magában foglalja a különböző mérőberendezéseket eszközöket, amikkel a részecske (fotonok) kölcsönhatnak. Ezt onnan lehet látni, hogy a 156 egyenletben nem csak a részecske tulajdonságai szerepelnek, hanem a $V(x)$ potenciál is, ami a részecskére ható körülményeket méri.
- A hullámfüggvény egy komplex függvény, ezért a helyettesítési értékei komplex számok.
- A hullámfüggvény négyzete $\psi^2 = \psi\bar{\psi}$ egy valós függvény (a komplex szám abszolút értéknek négyzete) aminek fizikai jelentést tulajdonítanak: a részecske megtalálási valószínűségét.

A "megtalálási valószínűség" elnevezés nem túl szerencsés, a kvantummechanika kezdetén alakult ki és maradt meg. Fizikailag azt jelenti, hogy a hullámfüggvény általában több lehetséges pozíciót is megenged arra, hogy az elektronhoz tartozó anyaghullám kölcsönhatásban lépjen. Láttuk, hogy a kölcsönhatásokban pontrészcseke-szerűen viselkednek az elemi részecskék (innen a megtalálási valószínűség elnevezést), ezért úgy gondolhatunk a hullámfüggvényre mint ami megmondja, hogy hol mekkora valószínűséggel viselkedik pontrészcsekeként, és hat kölcsön az vizsgált objektum. A tény, hogy a Schrödinger egyenlet adott kiindulási feltételekre nem csak egy, hanem több végállapotot is megenged a kvantummechanika érdekes tulajdonsága. A különböző végállapotoknak különböző a valószínűsége, hogy pontosan mekkora, azt a hullámfüggvény mondja meg. Mivel ezek közül a lehetőségek közül valamelyik mindig bekövetkezik az összes lehetőségek valószínűségeinek összege mindig egy, amit úgy mondunk, hogy a hullámfüggvény 1-re normált, azaz a helytől függő valószínűségek esetén igaz kell legyen:

$$1 = \sum P(x_i) = \int P(x)dx = \int \psi(x)\bar{\psi}(x)dx \quad (160)$$

Azaz a valószínűségeket minden kicsi helyre összeadva az összeg 1 kell legyen. A fentiek könnyebb elképzelését segíti egy mechanikai analógia: Egy labda egy domb tetején áll amit jobbra és balra teljesen szimmetrikusan két völgy ölel közre. Ha minden tökéletesen szimmetrikus akkor a labda a legkisebb külső hatásra véletlenszerűen vagy a jobb vagy a bal völgybe gurul le. Mivel a külső hatásokat nem ismerjük pontosan azt mondjuk hogy a labda 50-50 %-os valószínűséggel jobbra vagy balra gurul le. Ehhez hasonlóan viselkedik a hullámfüggvény is, azonban van egy jelentős különbség a mechanikához képest: A mechanikában ha pontosan tudnánk sz összes külső hatást ami a labdát éri, akkor elvileg ki tudnánk számolni hova gurul le. A kvantummechanikában a bizonytalanság nem a tudásunk hiányából ered hanem a rendszer része inherens módon, és elvileg sem tudnánk kiszámolni hova kerülne a részecske, akkor sem ha minden körülményt pontosan tudunk.

A kvantummechanika alapelvei

A kvantummechanika alapvetően másként tekint a világ jelenségeire mint a klasszikus mechanika ezért új fogalmakat vezet be a fizikai folyamatok leírására. Ezt tükrözik a kvantummechanika alapelvei, amik rögzítik azokat

az új fogalmakat, amik a Newton-egyenlet, Newtoni-erő, és a mechanikai mennyiségek általánosításai.

1. A fizikai rendszereket a hullámfüggvénnyel jellemezzük, ami minden fizikai információt hordoz a rendszerről. A hullámfüggvény a rendszer állapotát rögzíti, különböző állapotokhoz különböző függvények tartoznak.
2. A fizikai mennyiségeket a konkrét értékük helyett a hozzájuk tartozó mérési utasítással (operátorokkal) helyettesítjük. Pl. a 152 and 151 az impulzus és az energia definíciójává lép elő. Ennek oka az, hogy többé már nem igaz az, hogy a rendszer egy állapotához ezeknek a mennyiségeknek csak egy értéke tartozik. Pl. az impulzus operátort egy általános hullámfüggvényre hattanva az eredmény nem egy szám, ami a rendszer impulzusa, hanem több impulzus érték keveréke.
3. A hullámfüggvénnyel megadható annak a valószínűsége, hogy a rendszer egy adott állapotban van. Ez

$$P = \psi(x_0, t_0, a_0)\bar{\psi}(x_0, t_0, a_0) \quad (161)$$

ahol a hullámfüggvény argumentumában lévő mennyiségek az állapotot leíró paraméterek. $\bar{\psi}$ a hullámfüggvény komplex konjugáltja.

4. A valószínűségi értelmezés miatt a fentebb felírt valószínűségeknek az összes lehetséges esetre nézve ki kell adniuk az egységet. Ezt úgy mondjuk, hogy a hullámfüggvény normált. Ha csak az x változótól függ a hullámfüggvényt, akkor:

$$\begin{aligned} P(x_0) &= \psi(x_0)\bar{\psi}(x_0) \\ \sum \psi(x_i)\bar{\psi}(x_i) &= \int \psi(x_i)\bar{\psi}(x_i)dx \end{aligned} \quad (162)$$

5. Mivel egy fizikai mennyiségnek adott állapotban több lehetséges értéke is van a mérése során ezen lehetséges értékek átlagát látjuk, amit a fizikai mennyiség várható értékének hívunk. Egy A mennyiség várható értéke a lehetséges értékeinek azok valószínűségeivel súlyozott átlaga:

$$\begin{aligned} \langle \Psi|A|\Psi \rangle &= \sum P(A_i) A_i = \sum \bar{\Psi}(A_i) A_i \bar{\Psi}(A_i) \\ &= \int \bar{\Psi}(A_x) A_x \bar{\Psi}(A_x)dx \end{aligned} \quad (163)$$

(folytonos változókra integrálást, diszkrét változókra szummát kell használni.) ami az A várható értéke a Ψ állapotban és $\Psi(A_i)$ a hullámfüggvény értéke mikor $A = A_i$ Pl. a helyváltozó várható értéke:

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \int x \psi(x) \bar{\psi}(x) dx \quad (164)$$

6. A hullámfüggvény viselkedését a 156 Schrödinger-egyenlet határozza meg.

Meg kell jegyezni, hogy az axiómák nem mondják meg, mikor kell venni egy mennyiség várható értékét, hogy a mérési eredményeket megmagyarázzuk. A Schrödinger egyenlet nem beszél arról, mikor kell komplex abszolút értéket számolni, nem közvetlenül a valószínűségeket adja meg, csak a hullámfüggvényt. Jelenleg nem ismert olyan egyenlet ami közvetlenül a valószínűségeket adja meg, és minden szempontból helyettesíteni tudja a Schrödinger-egyenletet. A fentebb leírtakat nevezik **méréselméleti problémának**, és aktívan kutatott terület.

Egy konkrét példa: a Schrödinger egyenlet helyesen írja le az anyaghullámok viselkedését a kétrés kísérletben, de nem tartalmaz olyan tagot, ami arra vonatkozna, hogy konkrétan az részecskék kölcsönhatásba lépnek az ernyővel és ott valamilyen helytől függő valószínűséggel detektálódnak. A kiszámolt hullámfüggvényről nekünk kell tudnunk, hogy az ernyőn az elektronok becsapódnak, és mesterségesen négyzetre kell emelnünk, hogy megkapjuk a mérési adatokat. Ezután a négyzetre emelt hullámfüggvénnyel nem tudunk tovább számolni a Schrödinger egyenlettel.

Ezt hívják **hullámfüggvény összeomlásnak**: a négyzetre emelés és várható érték vétele után eltűnik a hullámfüggvény. Sőt ha csak a valószínűségeket tudjuk mérni, akkor abból nem tudjuk egyértelműen visszaállítani a hullámfüggvényt, mert a komplex részekről nincs információnk.

Részecske dobozban

Vizsgáljuk meg a Schrödinger-egyenlet megoldását egy dobozba zárt részecske esetében. Ez matematikailag azt jelenti, hogy a részecske mozgását korlátozzuk a $0 < x < L$ hosszúságú szakaszra. Ezt úgy érjük el, hogy a Schrödinger-egyenletben lévő $V(x)$ potenciál alakja:

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, & \text{ha } 0 < x < L \\ V(x) &= \infty & \text{egyébként} \end{aligned} \quad (165)$$

A fenti felosztás három részre osztja a teret, és hullámfüggvényt mindhárom részben külön-külön kell meghatározni, a az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet felhasználásával.

- $x < 0$: $\psi(x) = 0$ hiszen a feltevésünk szerint itt nem lehet a részecske.
- $x > L$: $\psi(x) = 0$ hiszen a feltevésünk szerint itt nem lehet a részecske.
- $0 < x < L$: $\psi(x)$ a 157 egyenlet megoldása, figyelembe véve a

$$\begin{aligned}\psi(x=0) &= 0 \\ \psi(x=L) &= 0\end{aligned}\tag{166}$$

feltételeket, amik abból adódnak, hogy a hullámfüggvénynek folytonosnak kell maradnia, ezért a középső szakasz megoldásának csatlakoznia kell a szélső szakaszok megoldásaihoz.

A megoldás menete:

1. Először meghatározzuk az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet megoldását általánosan.
2. A feladatban megfogalmazott megszorításokat felhasználva megadjuk a megoldás pontos alakját.
3. A megoldás alakjából meghatározzuk a lehetséges energiaszinteket, és impulzusokat.

Az időfüggetlen Schrödinger egyenlet megoldása Az (157) egyenlet az alábbi alakra hozható egyszerű helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k^2\psi(x) &= 0 \\ k^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2}\end{aligned}\tag{167}$$

A fenti differenciálegyenlet megoldása egy olyan függvény aminek második deriváltja arányos a függvénnyel.

- Az e^x függvény teljesíti ezt a feltételt mert minden deriváltja önmaga: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

- Az e^{-x} függvény szintén teljesíti ezt a feltételt: $\frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x}$ és $\frac{d^2}{dx^2}e^{-x} = (-)(-)e^{-x}$.
- A fenti két függvény összege szintén teljesíti ezt a feltételt hiszen: $\frac{d^2}{dx^2}(e^x + e^{-x}) = \frac{d^2}{dx^2}e^x + \frac{d^2}{dx^2}e^{-x} = (e^x + e^{-x})$
- A fenti két megoldást tovább általánosíthatjuk:

$$\frac{d^2}{dx^2}A(e^{ax} \pm e^{-ax}) = Aa^2(e^{ax} \pm e^{-ax}) \quad (168)$$

Ez a megoldás legáltalánosabb alakja. Fontos látni, hogy a két exponenciális kitevőjében azonos konstans használhatunk csak. A fenti általános alaknak már csak egyetlen hiányossága maradt: az (167) egyenletben a függvény második deriváltja a függvény negatív szám szorosával arányos, míg a (169) egyenletben pozitív szám szorosával. Ez azért van mert az exponenciális függvény 2. deriváltja a kitevőben lévő konstans négyzetét hozza ki a kifejezés elé. Ezt úgy tudjuk negatívvá tenni, ha komplex kitevőt használunk, mert $(ia)^2 = -a^2$. Ezzel:

$$\frac{d^2}{dx^2}A(e^{iax} \pm e^{-iax}) = -Aa^2(e^{iax} \pm e^{-iax}) \quad (169)$$

Ha $a = k$ akkor egyszerű behelyettesítéssel látható, hogy (169) megoldja a (167) egyenletet.

A feltételek felhasználása a megoldásban Az előzőek alapján a megoldás alakja:

$$\psi(x) = A(e^{ikx} \pm e^{-ikx}) \quad (170)$$

Az első feltétel: $\psi(x = 0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= A(e^0 \pm e^{-0}) \\ 0 &= 1 \pm 1 \end{aligned} \quad (171)$$

Amiből látszik, hogy a \pm -ből a $-$ előjelet kell elfogadnunk.

A második feltétel: $\psi(x = L) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= A(e^{ikL} \pm e^{-ikL}) \\
0 &= (e^{2ikL} - 1) \\
1 &= e^{2ikL} \\
2\pi n &= 2kL \\
k &= n\frac{\pi}{L},
\end{aligned} \tag{172}$$

ahol n egész számokat jelent. A megoldás alakja, figyelembe véve a feltételeket:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\
k &= n\frac{\pi}{L}
\end{aligned} \tag{173}$$

Ez egyszerűsíthető az Euler -tétel felhasználásával:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos(x) + i \sin(x) \\
e^{-ix} &= \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos(x) - i \sin(x) \\
&\Downarrow \\
e^{ix} - e^{-ix} &= 2i \sin(x)
\end{aligned} \tag{174}$$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= 2iA \sin(kx) \\
k &= n\frac{\pi}{L},
\end{aligned} \tag{175}$$

Az A konstans bármilyen számmal megszorozhatjuk, konstans marad, ezért $2iA \rightarrow A$ helyettesítéssel továbbra is jó megoldás marad, de még keresnünk kell egy feltétel A megadására. A megoldás amit a továbbiakban használunk:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= A \sin(kx) \\
k &= n\frac{\pi}{L} \\
k^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2}
\end{aligned} \tag{176}$$

A hullámfüggvény normáltsága A hullámfüggvény tárgyalásánál láttuk, hogy a valószínűségi értelmezés miatt a hullámfüggvény integrálja 1 kell, hogy legyen a teljes téren. Mivel itt a hullámfüggvény csak $0 < x < L$

esetekben nem 0, ezért csak erre a térrészre kell integrálni. A normáltsági feltétel:

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^{x=L} \psi(x)^2 dx &= A^2 \int_0^L \sin^2(kx) dx \\
 A^2 \int_0^L \frac{1 - \cos(2kx)}{2} dx &= A^2 \frac{1}{2} \left(L - \frac{\sin(2kL)}{2k} + \frac{\sin(0)}{2k} \right) \\
 1 &= \frac{LA^2}{2} \\
 A &= \sqrt{\frac{2}{L}}
 \end{aligned} \tag{177}$$

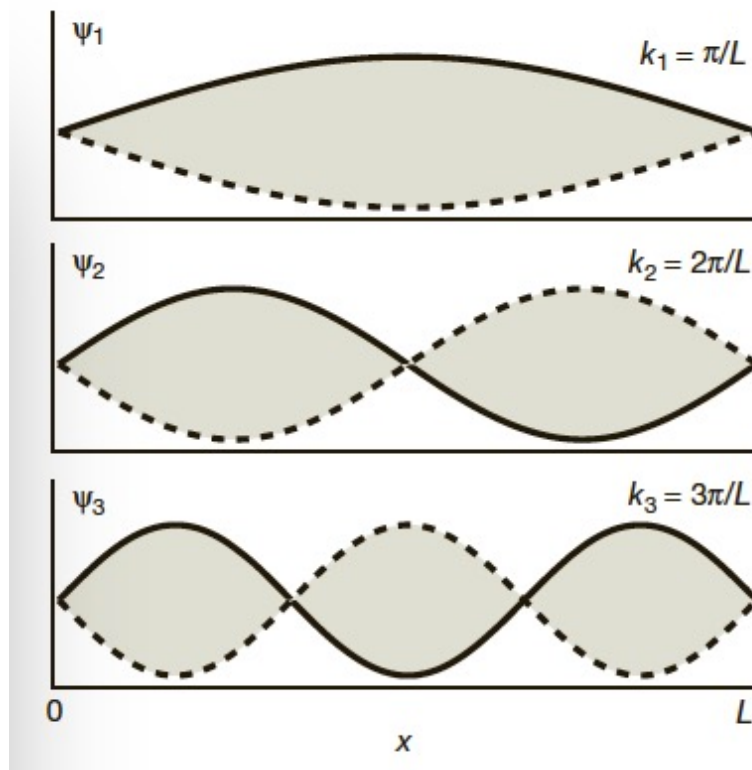
ahol felhasználtuk, hogy $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ valamint, hogy $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a}$, illetve, hogy a (176) alapján tudjuk, hogy $kL = n\pi$.

A teljes hullámfüggvény az időfüggő résszel együtt, ami mindig ugyanaz, ahogy az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet esetében vizsgáltuk:

$$\begin{aligned}
 \psi(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \\
 k &= n \frac{\pi}{L} \\
 k^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2}
 \end{aligned} \tag{178}$$

Ez a megoldás egy állóhullámot ír le. A részecske hullámfüggvénye olyan, mint a két pont közé befogott gitárhúr. Az állóhullám abban különbözik a síkhullámtól, hogy benne a hullámhegyek és hullámvölgyek nem mozognak, adott pontokban a kitérés maximális értéke mindig ugyanannyi. Ezzel az adott kitéréssel végez az ott lévő pont időben rezgést. Emiatt lehet az, hogy a hullámfüggvény térszerű részét érdemes vizsgálni, ugyanis a térszerű rész időben nem változik. Pl.: $x = L/2$ helyen $\psi(x = l/2, t)$ egy $\sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kL/2)$ amplitúdójú rezgést végez $e^{i/\hbar Et} \rightarrow \cos(E/\hbar t)$ szerint.

A megoldás alakja a 22 ábrán látható.



22. ábra. A dobozba zárt részecske hullámfüggvénye, különböző energiák, n -ek esetén.

A dobozba zárt részecske energiája A (178) megoldásban az energiát kifejezhetjük a következőképpen:

$$\begin{aligned} \frac{n^2\pi^2}{L^2} &= \frac{2mE}{\hbar^2} \\ E_n &= n^2 \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \\ E_n &= n^2 E_0 \end{aligned} \tag{179}$$

Azaz a részecske energiája nem lehet tetszőleges! A rendszer számára csak adott energiájú állapotok elérhetőek, ezeket számozza n . Úgy mondjuk a rendszernek kvantált energiaszintjei vannak, és n -et **kvantumszámnak** hívjuk. Ez a helyzet gyakran előfordul a kvantummechanikában, és általában nem csak egy kvantumszámmal jellemezhetünk egy állapotot. A különböző

n -ekhez tartozó hullámfüggvények máshogy néznek ki, másol vannak a maximumai és minimumai. Ebben az esetben n -nek megfelelő számú hullámhegy/völgy kerül a $0 < x < L$ szakaszra. A részecske legalacsonyabb energiaszintje $n = 1$ -hez tartozik és nem 0! Ez egy klasszikus rendszer esetében nem így van, ott a legalacsonyabb energia mindig 0. Ezt hívják **nullponti energiának**. A kvantummechanikában gyakran előfordul nem 0 nullponti energia, azonban hatása nem mutatható ki, mivel a kísérletek során mindig energiakülönbségeket mérünk, és nem tudunk a legkisebb energiaszint alá kerülni (ezért a legkisebb). (ehhez az kellene, hogy legyen egy kisebb szint amire le tud kerülni a rendszer.) Az, hogy a nullponti energia nem fizikai az is mutatja, hogy függ a doboz paramétereitől, ezért nem egy univerzális dolog. A **Casimir**-effektus néven ismert jelenséget sokáig a nullponti energia bizonyítékeként tartották számon, de kiderült, hogy magyarázható QED módszereivel is, ahol nincs szükség a fogalomra.

A dobozba zárt részecske tartózkodási valószínűsége A hullámfüggvényből megtudhatjuk, hogy mekkora valószínűséggel találjuk a részecskét egy adott helyen. Pl a doboz bal oldalán:

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} \psi(x)^2 dx &= \int_0^{L/2} \frac{2}{L} \sin^2(kx) dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(kL)}{2k} + \frac{\sin(0)}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sin(kL)}{2kL} \end{aligned} \quad (180)$$

Mivel $kL = n\pi$ az eredmény függ n -től, ami nem csoda, mert a hullámfüggvény alakja ekkor más.

$$n = 1 \text{ esetben: } kL = \pi \text{ és } \sin(\pi) = 0$$

$$P(0 < x < L/2, n = 1) = 1/2 \quad (181)$$

$$n = 2 \text{ esetben: } kL = 2\pi \text{ és } \sin(2\pi) = 0$$

$$P(0 < x < L/2, n = 2) = 1/2 \quad (182)$$

Bármely a és b közötti tartózkodási valószínűséget kiszámolhatjuk:

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(x)^2 dx &= \int_a^b \frac{2}{L} \sin^2(kx) dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{1}{2} \left((b-a) - \frac{\sin(2kb)}{2k} + \frac{\sin(2ka)}{2k} \right)\end{aligned}\quad (183)$$

Legyen $a = L/3$ és $b = 2(L/3)$. $n = 1$ esetben: $kL = \pi$ amit azt jelenti, hogy $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ valamint, hogy $\sin(4\pi/3) = \sqrt{3}/2 = -\sqrt{3}/2$

$$\begin{aligned}P(L/3 < x < 2L/3, n = 1) &= \frac{1}{L} \left(\frac{L}{3} + \frac{\sqrt{3}/2L}{2\pi} + \frac{\sqrt{3}/2L}{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,61\end{aligned}\quad (184)$$

A részecske nagy valószínűséggel a doboz közepén található meg. Egy fizikai mérés eredményét a részecske helyére vonatkozóan a következőképpen képzelhetjük el: a $0 < x < L$ szakaszt felosztjuk N db kis Δx hosszúságú szakaszra. A szakaszokat a sorszámukkal azonosítjuk Δx_i az i -dik szakasz. A Δx hosszát úgy kell megválasztani, hogy a mérőberendezés hely felbontásának feleljen meg. A berendezés azt tudja csak eldönteni, melyik kis szakaszban méri a részecske helyét, de azt nem, hogy azon belül hol van. Minden ilyen kis szakaszra kiszámolhatjuk, hogy mekkora a valószínűsége, hogy ott van a részecske. (ez függ a szakasz helyétől) A berendezés sokáig be van kapcsolva, akkor sok helyen detektálja a részecskét. tegyük fel, hogy ideálisan működik, és nem változtatja meg a részecske energiáját eközben. A gépnek van valamilyen mintavételi gyakorisága, tehát adott idő alatt adott mennyiségű mérést képes végezni. Tegyük fel, hogy $N = 100$ db mérést végzett a berendezést. Az adatok kiolvasása után statisztikát készítünk arról, hogy melyik Δx_i szakasz hányszor fordul elő, azaz, hogy hányszor detektálta a gép a részecskét egy adott szakaszon belül. Legyen az a szám N_i . Ekkor

$$P(x \in \Delta x_i) = \frac{N_i}{N} \quad (185)$$

Ez a valószínűség akkor egyezik meg a fenti módon integrálással kiszámolt valószínűséggel, ha N nagyon nagy, addig az eredmény az elméleti valószínűség körül fluktuál a mérési módszertől függő módon.

A dobozba zárt részecske helyének várható értéke A fent leírt módon zajló mérés eredményeit átlagolhatjuk, hogy megtudjuk "átlagosan" hol

helyezkedik el a részecske. Ez matematikailag a hely operátor várható értékét jelenti ebben az állapotban. Fentebb láttuk, hogy kiszámításának módja:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(x)|x|\psi(x) \rangle &= \int \bar{\psi}(x)x\psi(x)dx \\
 &= \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) x \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx)dx \\
 &= \int_0^L \frac{2}{L} x \sin^2(kx)dx
 \end{aligned} \tag{186}$$

használjuk fel az alábbi azonosságot:

$$\int x \sin^2(ax)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin(2ax)}{4a} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2} \tag{187}$$

Az eredményhez a 0 L határokat kell beírni az integrálba:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(x)|x|\psi(x) \rangle &= \frac{2}{L} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x \sin(2kx)}{4k} - \frac{\cos(2kx)}{8k^2} \right) \\
 &= \frac{L}{2} - \frac{L \sin(2kL)}{2k} - \frac{\cos(2kL) - 1}{4k^2 L}
 \end{aligned} \tag{188}$$

Az eredmény k -n keresztül függ n -től. Vegyünk alapállapotot $n = 1$. Ekkor $kL = \pi$ és $2k = 2\pi/L$.

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(x, n = 1)|x|\psi(x, n = 1) \rangle &= \\
 &= \frac{L}{2} - \frac{L \sin(2\pi)}{2\pi} - \frac{\cos(2\pi) - 1}{4\pi^2 L} = \frac{L}{2}
 \end{aligned} \tag{189}$$

Az eredmény szemléletes abból a szempontból, hogy a részecske átlagosan ott tartózkodik ahol nagy a tartózkodási valószínűsége, azaz a doboz közepén.

A részecske impulzusa A (178) -ből felhasználjuk a részecske energiájára vonatkozó egyenleteket, továbbá a tényt, hogy a részecske impulzusa és energiája közötti kapcsolat akkor amikor a potenciál 0:

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{190}$$

Ezekkel:

$$\begin{aligned}
 \frac{p^2}{2m} = E_n = n^2 E_0 = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \\
 p = \pm n \frac{\hbar \pi}{L} = \pm k \hbar
 \end{aligned} \tag{191}$$

Ennek az eredménynek két érdekes tulajdonsága van. Az egyik, hogy az impulzus függ n -től. A másik, hogy adott n kvantumszámhoz nem egy hanem két impulzus érték is tartozik, 50-50 %-os valószínűséggel (hiszen a két értékhez minden más szempontból azonos állapota tartozik a részecskének). Ez a helyzet gyakran előfordul a kvantummechanikában és úgy mondjuk, hogy a részecske állapota nem **impulzus sajátállapot**. Nem ennyire nyilvánvaló, de ki utánagondolás után látható, hogy pontosan ez a helyzet a hely operátorra is. A dobozba zárt részecske nincs hely operátor sajátállapotban, hiszen a hullámfüggvény pont azt mondja, hogy több lehetséges hely érték is ugyanolyan jógon előfordulhat, persze nem azonos valószínűséggel.

Sajátfüggvény, sajátállapot Az fizikai mennyiségeket definiáló egyenletek (151) és (152) tekinthetők differenciálegyenleteknek is, és megoldásaik a fizikai mennyiséghez tartozó sajátfüggvények. A sajátfüggvények olyan hullámfüggvények melyekre nézve az adott fizikai mennyiségnek határozott értéke van. A fenti megoldás a rendszer energia sajátállapota mert minden n -hez egy olyan hullámfüggvény tartozik aminek energiája adott. Általában a fizikai rendszer energiasajátállapotait keressük, mert az energia megmaradása miatt ezek időben állandóak, illetve a kölcsönhatások különböző energia sajátállapotok között viszik át a rendszert. Ennek általában az a következménye, hogy a rendszer sem hely, sem impulzus sajátállapotban nincs, azaz megkapjuk a kvantummechanikai jelenségeket, amikben egy állapothoz több lehetséges hely és impulzus tartozik, így belekényszerülünk a valószínűségi értelmezésbe.

Impulzus sajátállapot Vizsgáljuk meg az impulzus sajátállapotait. Az egyenlet:

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{i}{\hbar}p\psi(x) \quad (192)$$

Ennek megoldásai olyan függvények amik deriváltja arányos magával a függvénnyel. Láttuk már, hogy ezek a függvények az exponenciális függvények. Az impulzus operátor sajátfüggvényei tehát:

$$\Psi(x)_p = Ae^{i\frac{p}{\hbar}x} \quad (193)$$

Ez úgy írhatjuk le, hogy :

$$\hat{P}\Psi(x)_p = p\Psi(x)_p \quad (194)$$

Ahol bevezettük az impulzus operátorra a rövidített jelölést: $\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ Ezek a sajátfüggvények egy nagyon fontos tulajdonsággal rendelkeznek, amit ortogonalitásnak hívnak. Vegyünk két impulzus sajátfüggvényt, amik különböző impulzusokhoz tartoznak.

$$\begin{aligned}\hat{P}\Psi(x)_p &= p\Psi(x)_p \\ \hat{P}\Psi(x)_{p'} &= p'\Psi(x)_{p'}\end{aligned}\tag{195}$$

Komplex konjugáljuk a 2. egyenletet és szorozzuk meg $\Psi(x)_p$ -vel az első egyenletet pedig $\overline{\Psi(x)_{p'}}$ -vel, majd vonjuk ki a két egyenletet egymásból. A p és p' értékek nem változnak mert valósak.

$$\overline{\Psi(x)_{p'}}\hat{P}\Psi(x)_p - \Psi(x)_p\overline{\hat{P}\Psi(x)_{p'}} = (p - p')\Psi(x)_p\overline{\Psi(x)_{p'}}\tag{196}$$

Integráljuk mindkét oldalt. A bal oldal mindkét tagja egyenlő. Ennek az az oka, hogy az integrálás után az első tag definíció szerint az impulzus várható értéke, ami valós, ekkor igaz, hogy:

$$\begin{aligned}a &= \bar{a} = \overline{\overline{\Psi(x)_p}\hat{P}\Psi(x)_{p'}} \\ &= \Psi(x)_p\overline{\hat{P}\Psi(x)_{p'}}\end{aligned}\tag{197}$$

Azaz a két kifejezés egyenlő, ezért az eredmény:

$$\begin{aligned}0 &= (p - p') \int \Psi(x)_p \overline{\Psi(x)_{p'}} dx \\ &\Downarrow \\ &\int \Psi(x)_p \overline{\Psi(x)_{p'}} dx \\ &0, \quad \text{ha } p \neq p' \\ &1, \quad \text{ha } p = p'\end{aligned}\tag{198}$$

Azaz ha a sajátfüggvényt önmagával integráljuk az érték 1, mert normált, ha pedig mással akkor mindig 0. Ez a tulajdonság nagyban leegyszerűsíti a kvantummechanikai számolásokat. Mielőtt a dobozba zárt részecske megoldását felírtuk volna sin-al láttuk hogy a hullámfüggvény két exponenciális függvény összegeként áll elő, speciálisan:

$$\psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx})\tag{199}$$

A függvények amikből áll a megoldása pontosan az impulzus operátor saját-függvényei! A megoldása ezért írható így is:

$$\psi(x) = \Psi(x)_{k\hbar} - \Psi(x)_{-k\hbar} \quad (200)$$

Azaz a dobozba zárt részecske hullámfüggvénye előállítható, mint impulzus sajátfüggvények (sajátállapotok) kombinációja. Speciálisan egy $p = k\hbar$ nagyságú és egy $-p$ nagyságú impulzushoz tartozó sajátfüggvény különbségeként. Pont ezek azok az impulzusok amiket kiszámítottunk fentebb. Ezek az eredmények általánosan is igazak. **Minden kvantummechanikai állapot (hullámfüggvény) felírható mint impulzus sajátállapotok kombinációja.** Az állapotban ezek után azok az impulzusok fordulnak elő egy fizikai mérés során amikből összeállítottuk. (Valójában ez az állapot Fourier-transzformáltja, hiszen a Fourier-transzformáció síkhullámokra való felbontást jelent, amik pont az impulzus sajátfüggvényei) A matematikai megfogalmazása ennek a ténynek a következő: Hassunk a kombinációra az impulzus operátorral: $\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$

$$\begin{aligned} \hat{P}\psi(x) &= \hat{P}\Psi(x)_{k\hbar} - \hat{P}\Psi(x)_{-k\hbar} \\ &= k\hbar\Psi(x)_{k\hbar} + k\hbar\Psi(x)_{-k\hbar} \end{aligned} \quad (201)$$

A sajátfüggvények ortogonlitasát kihasználva könnyen kiszámolhatjuk a várható értéket:

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) | \hat{P} | \psi(x) \rangle &= \int \overline{\psi(x)} \hat{P}\psi(x) dx \\ &= \int (\overline{\Psi(x)_{k\hbar}} - \overline{\Psi(x)_{-k\hbar}}) (k\hbar\Psi(x)_{k\hbar} + k\hbar\Psi(x)_{-k\hbar}) dx \end{aligned} \quad (202)$$

Az impulzus sajátfüggvények ortogonlitasá miatt csak azok a tényezők nem nullák a két kifejezés szorzása után, amikben azonos impulzushoz tartozó függvények szorzatai alkotnak. Ha konstansokat kivesszük az integrálok elé, akkor az eredmény:

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) | \hat{P} | \psi(x) \rangle &= \\ &= k\hbar \int \overline{\Psi(x)_{k\hbar}} \Psi(x)_{k\hbar} dx - k\hbar \int \overline{\Psi(x)_{-k\hbar}} \Psi(x)_{-k\hbar} dx \\ &= k\hbar - k\hbar = 0 \end{aligned} \quad (203)$$

Ahol felhasználtuk, hogy a sajátfüggvények önmagukkal komplex konjugáltjával vett integrálja 1, mert normáltak.

Tehát az impulzus várható értéke $p = 0$, aminek az a legfőbb oka, hogy minden állapotban az adott energiához két egymással ellentétes impulzus tartozik, és ezek kiejtik egymást. Ezt az eredményt kapjuk akkor is, ha közvetlenül elvégezzük a számítást:

$$\begin{aligned}\langle \psi(x) | \hat{P} | \psi(x) \rangle &= \frac{2\hbar}{L} \frac{1}{i} \int_0^L \sin(kx) \frac{d}{dx} \sin(kx) dx = \\ &= \frac{2\hbar}{L} \frac{1}{i} k \int_0^L \sin(kx) \cos(kx) dx = \\ &= \frac{2\hbar}{L} \frac{1}{i} k \frac{\sin^2(kx)}{2k} \Big|_0^L\end{aligned}\quad (204)$$

Az eredmény $n = 1$ esetén $kL = \pi$ valamint $\sin(\pi) = 0$ miatt 0.

Fizikai mennyiségek sajátállapotai Amit fentebb az impulzusról beláttunk az igaz, minden fizikai mennyiségre. Azaz

- Minden fizikai mennyiséghez tartozik egy operátor, aminek várható értéke bármely hullámfüggvényre nézve valós. Kiszámítási módja:

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \int \bar{\Psi} \hat{A} \Psi \quad (205)$$

- Az operátorhoz tartoznak **sajátállapotok** amik olyan hullámfüggvények melyekre nézve az adott fizikai mennyiség értéke adott:

$$\hat{A} \Psi = a \Psi \quad (206)$$

ahol Ψ az operátor egy **sajátfüggvénye**, amihez a fizikai mennyiség a értéke tartozik, ezt az operátor **sajátértékének** nevezzük és mindig valós.

- A sajátfüggvények **ortgonálisak**: önmaguk komplex konjugáltjával vett integráljuk, mindig 0, kivéve, ha egy olyan függvénnyel vesszük amihez a fizikai mennyiség ugyanazon sajátértéke tartozik, ekkor 1.

$$\int \bar{\Psi}(x)_a \psi(x)_b dx = \delta_{ab} \quad (207)$$

- Minden fizikai állapot, hullámfüggvény felírható bármilyen fizikai mennyiség sajátfüggvényeinek kombinációjaként. Ez az kombináció nem biztos, hogy véges mennyiségű tagot tartalmaz, ha csak egy tagot, akkor pedig sajátállapot.

Határozatlansági reláció

Amikor megoldjuk a Schrödinger egyenletet a rendszer energiasajátállapotait kapjuk. Ha ez az állapot nem sajátállapota a hely vagy az impulzus operátornak, akkor ezek sajátfüggvényeinek kombinációiból építhető fel. Mivel minden sajátfüggvényhez egy hely, illetve impulzus adat tartozik, a kombinációt elkerülhetetlenül több impulzus illetve hely érték jellemzi attól függően melyik sajátfüggvény-rendszert használtuk (csak egyet szabad egyszerre). Ez azt jelenti, hogy sem a helynek sem az impulzusnak nem lehet határozott értéke az állapotban. Megbecsülhetjük mekkora értékek között ingadoznak, ha vesszük a várható értékük és az ettől legtávolabbi érték különbségét. Hívjuk ezeket Δp -nek és Δx -nek.

A dobozba zárt részecske esetén:

- : $\Delta x = L/2$, mert a hely várható értéke $x = L/2$ és ettől legmesszebb a részecske a széleken lehet $x = 0$ és $x = L$ pontokban. Ezek távolsága $L/2$
- : Az impulzus várható értéke minden esetben 0 volt, amint láttuk, de ez két érték $\pm p = \pm \hbar k$ közül bármelyik lehet, ezért $\Delta p = \hbar k$ a legnagyobb eltérés.

Ezeket felhasználva írható, hogy:

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar \frac{kL}{2} = \hbar \frac{n\pi}{2} = n\pi \frac{\hbar}{2} > \frac{\hbar}{2} \quad (208)$$

Azaz az impulzus és a hely bizonytalansága között fordított összefüggés van. Ez egy általánosítható állítás, a Heisenberg-féle határozatlansági reláció.

5. Magfizika és radioaktivitás

6. Térelmélet és a részecskefizika

7. Renormálás és univerzalitás

8. Szilárdtestfizika, szupravezetés, félvezetők

References

- [1] John D. Barrow. *A fizika világgépe*. Akadémiai, 1994.
- [2] John D. Barrow. *The World Within the World*. Oxford University Press, 1990.
- [3] Albert Einstein. *A speciális és általános relativitás elmélete*. Gondolat, 1978.
- [4] Pólya György. *A gondolkodás iskolája*. Akkord, 2000.
- [5] Pólya György. *Matematikai módszerek a természettudományban*. Gondolat Könyvkiadó, 1984.
- [6] Simonyi Károly. *A fizika kultúrtörténete a kezdetektől a huszadik század végéig*. Akadémiai Kiadó, 2011.
- [7] Michele Maggiore. *Gravitational Waves Volume 1 Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2017.
- [8] Hraskó Péter. *A relativitáselmélet alapjai*. typotex, 2009.
- [9] Hraskó Péter. *Relativitáselmélet*. typotex, 2017.
- [10] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. <http://www.eftaylor.com/exploringblackholes/>.
- [11] Michael Tsampanlis. *Special Relativity*. Springer, 2010.
- [12] Edwin F. Taylor – John Archibald Wheeler. *Téridőfizika*. 2005.